



Ejercicio 5 - Lista de Ejercicios 4

Tamara Cucumides

Demuestre que $\#IS \leq_p^{par} \#MIS$. Nótese que de esto se concluye que si existe un FPRAS para $\#MIS$ entonces $NP = RP$.

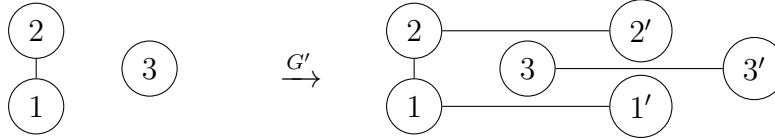
Solución: Veamos la reducción. Sea $G = (V, E)$ con $V = v_1, \dots, v_n$ un grafo para $\#IS$, entonces queremos construir un grafo $G' = (V', E')$ tal que $\#IS(G) = \#MIS(G')$.

El grafo G' será construido de la siguiente manera:

- $V' = V \cup \{v'_i \mid \text{para cada } v_i \in V\}$ (hacemos una copia de cada nodo del grafo)
- $E' = E \cup \{(v_i, v'_i) \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$ (cada nodo esta conectado a su copia)

Esta construcción puede hacerse en tiempo polinomial.

Veamos un ejemplo: tomamos el siguiente grafo G y su G' respectivo:



Y vemos que tienen los siguientes conjuntos independientes / conjuntos independientes maximales, respectivamente:

1. $\emptyset$ en $G \rightarrow \{1', 2', 3'\}$ en G'
2. $\{1\}$ en $G \rightarrow \{1, 2', 3'\}$ en G'
3. $\{2\}$ en $G \rightarrow \{1', 2, 3'\}$ en G'
4. $\{3\}$ en $G \rightarrow \{1', 2', 3\}$ en G'
5. $\{1, 3\}$ en $G \rightarrow \{1, 2', 3\}$ en G'
6. $\{2, 3\}$ en $G \rightarrow \{1', 2, 3\}$ en G'

Demostramos ahora que la reducción es correcta. Para esto, veamos que cada conjunto independiente de G corresponde con un (y solo un) conjunto maximal de G' .

El claim es que cada conjunto independiente en G , digamos S , se transformará en S' un conjunto independiente maximal en G' de la siguiente manera:

$$S' = S \cup \{v'_i \mid \text{para } i \text{ tal que } v_i \notin S\}$$

Sea f la función que transforma los S en S' , demostramos que la función es correcta, es decir, sea S un conjunto independiente en G , demostramos que $f(S)$ es un conjunto independiente maximal en G' :

- $f(S)$ es independiente en G' .

Para esto tomamos v_i y v_j en $f(S)$ y demostramos que $(v_i, v_j) \notin E'$. Analizamos por casos:

1. v_i y v_j pertenecen a $V' - V$ (son *copias*) : en este caso, las copias solo están conectadas con el nodo que le correspondan, así que $(v_i, v_j) \notin E'$
2. v_i y v_j pertenecen a V (nodos del grafo *original*) : como el conjunto S es independiente, entonces $(v_i, v_j) \notin E$. Además, en E' solo agregamos aristas desde un nodo a su *copia*, así que $(v_i, v_j) \notin E'$.
3. $v_i \in V$ y $v_j \in V' - V$ (uno *original* y el otro *copia*) : las únicas aristas entre nodos originales y sus copias son de la forma (v_i, v'_i) , pero sabemos por construcción que v_i y v'_i nunca aparecerán juntos en un conjunto $f(S)$, de modo que $(v_i, v_j) \notin E'$

- $f(S)$ es independiente maximal en G'

Para esto veamos que para cualquier $v \in V' - S$, al agregar v a $f(S)$ el conjunto deja de ser independiente. Acá de nuevo analizamos por casos:

1. si el v que añadimos está en V : en este caso, tenemos que como originalmente $f(S)$ no contiene a v , entonces por construcción si contiene a su copia v' . Al agregar v a $f(S)$, entonces tanto v como su copia v' estarán en el conjunto y por construcción $(v, v') \in E'$, de modo que el conjunto deja de ser independiente.
2. si el v' que añadimos está en $V' - V$ (es una de las copias) : como v' no estaba originalmente en $f(S)$, entonces debe pasar que v (el nodo original que correspondía a la copia) si está en $f(S)$. Al agregar v' tendremos que $f(S)$ dejara de ser independiente pues $(v, v') \in E'$.

Finalmente demostramos que la reducción es parsimoniosa, es decir, que la cantidad de conjuntos independientes de G es igual a la cantidad de conjuntos independientes maximales en G' . Para esto vemos que f es biyectiva:

- f es sobre

Para esto demostramos que cada conjunto independiente maximal S' en G' tiene un conjunto independiente S en G tal que $f(S) = S'$.

Para esto tomamos $S = f^{-1}(S')$ (quitarle todas las v' que le habíamos agregado) y demostramos que es un conjunto independiente en G .

Esto sale directo de la construcción:

Supongamos por contradicción que S no es independiente en G , entonces existen v_1 y v_2 en S tal que $(v_1, v_2) \in E$. Como $E \subset E'$, entonces $(v_1, v_2) \in E'$, de modo que S' no es independiente en G' . Contradicción, entonces S es independiente en G .

■ f es inyectiva

Dada la construcción de S' es fácil ver que si $S_1 \neq S_2$ entonces $f(S_1) \neq f(S_2)$. Sin pérdida de generalidad, asumamos que existe i tal que $v_i \in S_1$ y $v_i \notin S_2$, entonces por construcción $v'_i \in f(S_2)$ y $v'_i \notin f(S_1)$, de modo que $f(S_1) \neq f(S_2)$.

Con esto concluimos que la cantidad de conjuntos independientes en G es igual a la cantidad de conjuntos independientes maximales en G' .

Finalmente, para concluir que no existe un FPRAS para $\#MIS$ a no ser que $NP=RP$, usamos el siguiente teorema:

Teorema 1 *Si $f \leq_{par}^p g$ y existe un FPRAS para g , entonces existe un FPRAS para f*

Usando esto y como demostramos que $\#IS \leq_p^{par} \#MIS$, entonces si existe un FPRAS para $\#MIS$, también existe un FPRAS para $\#IS$, lo que implica que $NP=RP$.