

a) Demuestre que $L_{\#MIS} \in PTIME$

Determinar si existe un conjunto indep. maximal en G es trivial ya que todos los grafos tienen conjuntos independientes maximales.

Esto ya que si existe un conj. indep. en G entonces existe un conj. indep. maximal en G :

```
S : conj. indep. ,  $G = (V, E)$ 
for  $v \in V$ :
  if  $S \cup \{v\}$  es conj. indep. then:
     $S = S \cup \{v\}$ 
  end if
end for
 $S' = S$ 
```

luego S' es conj. indep. maximal.

Ahora, como $\emptyset \subseteq V$ es un conj. indep. de G para cualquier grafo G

$\Rightarrow$ siempre existe un MIS.

$\Rightarrow L_{\#MIS} \in PTIME$.

b) Demuestre que si existe un FPRAS para #MIS entonces $NP = RP$.

[Sol] si demostramos que $NP \subseteq BPP$, entonces $NP = RP$.

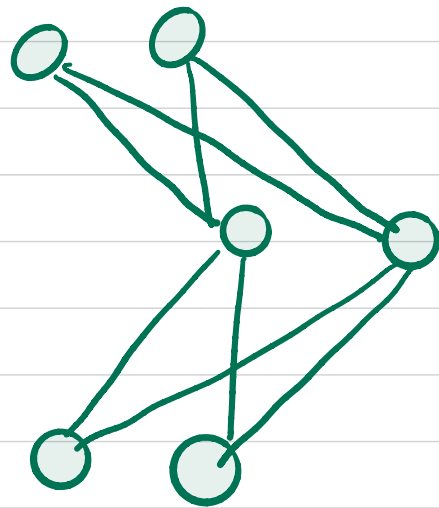
→ Construimos grafo aumentado G^r y mostramos que si existe un FPRAS para #MIS entonces $GIS \in BPP$.

Idea 1 Ver si funciona el grafo aumentado para #LIS:

$r=2$



G



G^r

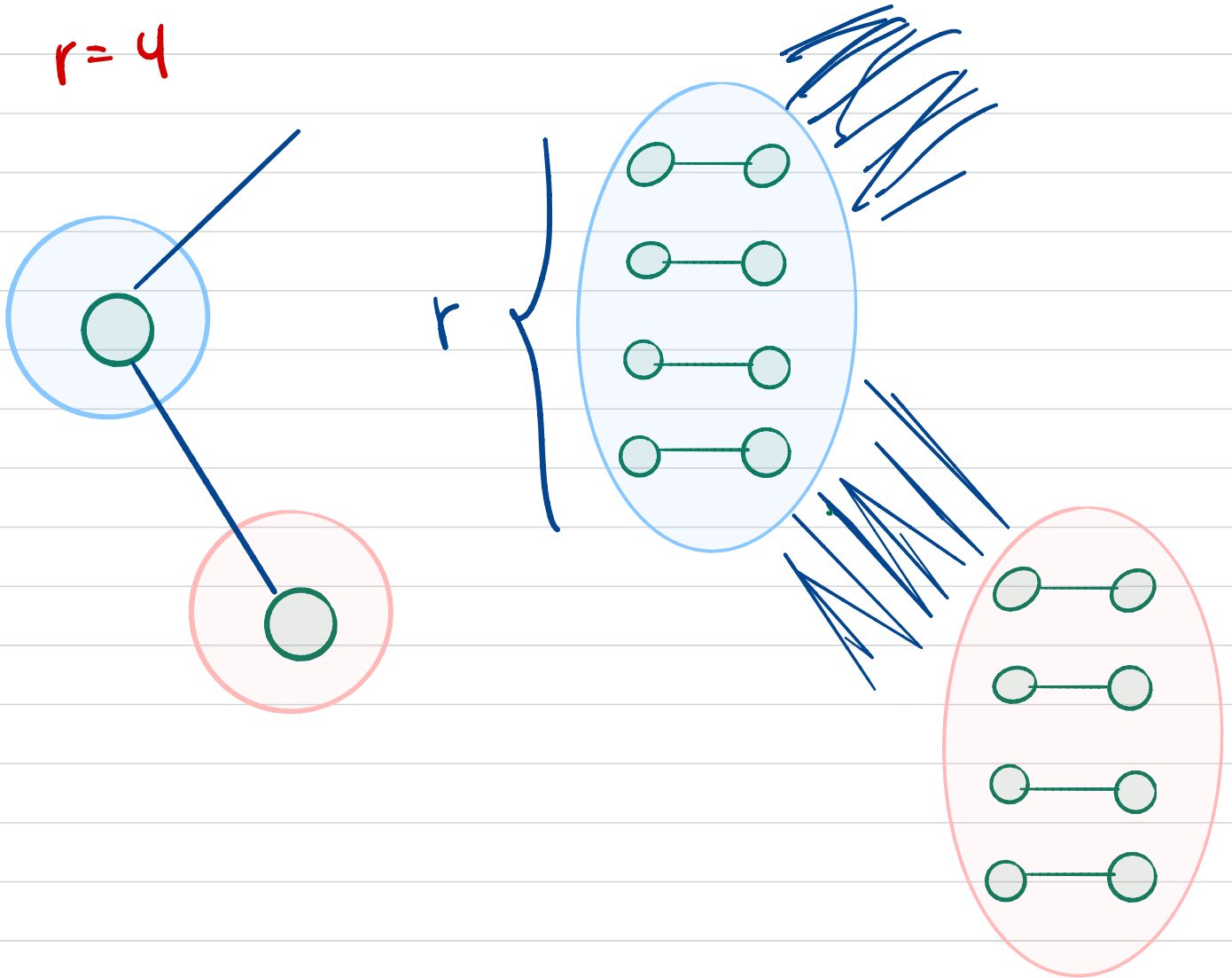
Esta idea no funciona para #MIS ya que ambos grafos tienen la misma cantidad de conj. indep. maximales.

de tam 1

→ Por cada C.I. en G se generan $(2^r - 1)^2$ C.I. en G^r , pero de estos últimos solamente el que ocupa todos los vértices creados puede ser maximal (en caso que se originó de un MIS).

Idea 2 Hacer el mismo grafo aumentado, pero esta vez "unir los nodos de a pares" usando nuevos aristas.

$r = 4$



Por cada MIS de tamaño l en G obtengo $(2^r)^l$ MIS de tamaño $r \cdot l$ en G^r .

NOTAR que un IS en G que no es MIS no puede generar un MIS en G^r , y que un MIS en G^r es testigo de un solo IS en G (que es MIS).

Definiciones y cotas

Sea T un IS en G^r que es testigo de un IS S_T en G .

$$M^r(G, k) = \{T \mid T \text{ es un MLS en } G^r \text{ con } |S_T| \leq k\}$$

Para $l \in \{0, \dots, k\}$ definimos t_l como la cantidad de testigos en G^r para un MLS con l nodos.

Por definición de G^r tenemos que $t_l = 2^{rl}$

Además G tiene a lo más $\binom{n}{l}$ IS de l nodos.

$\Rightarrow G$ tiene a lo más $\binom{n}{l}$ MLS de l nodos.

Luego,

$$\begin{aligned} |M^r(G, k)| &\leq \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n}{l} t_l \\ &\leq \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n}{l} t_{k-1} \\ &\leq t_{k-1} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \\ &= t_{k-1} 2^n \\ &= 2^{r(k-1)} \cdot 2^n \end{aligned}$$

Podemos relacionarlo con GIS de la siguiente manera:

- Si $(G, k) \in \text{GIS}$:

$\Rightarrow$ Existe un IS de tamaño $\geq k$ en G .

$\Rightarrow$ Existe un MIS de tamaño $\geq k$ en G .

$\Rightarrow \# \text{MIS}(G^r) \geq 2^{rk}$

- Si $(G, k) \notin \text{GIS}$:

$\Rightarrow$ Existen solo IS de tamaño $< k$ en G .

$\Rightarrow$ Existen solo MIS de tamaño $< k$ en G .

$\Rightarrow \# \text{MIS}(G^r) = |M^r(G, k)|$

$$\leq 2^n \cdot 2^{r(k-1)}$$

Podemos tomar $r = n + 2$, pero más adelante derivaremos esta igualdad. Por ahora usaremos r .

y es suficiente

Definimos el algoritmo aleatorizado B para GIS :

1. Dado (G, k) , G grafo con n nodos, si $k=0$ retorne sí, e.o.c. vaya al paso 2.
2. Genere el grafo G^r
3. Sea $s = A(G^r, 1/2)$, A : FPRAS para $\#MIS$
4. Si $s > (1 + 1/2) 2^n 2^{r(k-1)}$, entonces retorne sí, en caso contrario retorne no.

→ Dado que G^r es polinomial respecto a G ,
 A es un FPRAS y $\epsilon = 1/2$

$\Rightarrow B$ funciona en tiempo polinomial
respecto a (G, k) .

Probabilidad de error del algoritmo

• Si $(G, k) \notin \text{GLS}$, entonces

$$\begin{aligned} & \Pr(B(G, k) \text{ retorna sí}) \\ &= \Pr(A(G^r, 1/2) > (1 + 1/2) 2^n 2^{r(k-1)}) \quad \begin{array}{l} \text{/#MIS}(G) \\ \leq 2^n 2^{r(k-1)} \end{array} \\ &\leq \Pr(A(G^r, 1/2) > (1 + 1/2) \# \text{MIS}(G^r)) \\ &\leq \Pr(A(G^r, 1/2) > (1 + 1/2) \# \text{MIS}(G^r)) \quad \checkmark \\ &\quad A(G^r, 1/2) < (1 - 1/2) \# \text{MIS}(G^r) \\ &= 1 - \Pr(A(G^r, 1/2) \leq (1 + 1/2) \# \text{MIS}(G^r)) \quad \wedge \\ &\quad A(G^r, 1/2) \geq (1 - 1/2) \# \text{MIS}(G^r) \\ &= 1 - \Pr(|A(G^r, 1/2) - \# \text{MIS}(G^r)| \leq 1/2 \# \text{MIS}(G^r)) \\ &\quad \geq 3/4 \\ &\leq 1 - 3/4 = 1/4 \end{aligned}$$

• Si $(G, k) \in \text{GIS}$

Herramienta útil: queremos r tal que

$$(1 - 1/2) \# \text{MIS}(G^r) > (1 + 1/2) 2^n 2^{r(k-1)}$$

$$\Leftrightarrow 1/2 \# \text{MIS}(G^r) > 3/2 2^n 2^{r(k-1)}$$

$$\Leftrightarrow \# \text{MIS}(G^r) > 3 \cdot 2^n 2^{r(k-1)}$$

Dado que $\# \text{MIS}(G^r) \geq 2^{rk}$, entonces basta encontrar r tal que

$$2^{rk} > 3 \cdot 2^n \cdot 2^{r(k-1)}$$

$$\Leftrightarrow 2^r \cdot 2^{r(k-1)} > 3 \cdot 2^n \cdot 2^{r(k-1)}$$

$$\Leftrightarrow 2^r > 3 \cdot 2^n$$

$$\Leftrightarrow 2^r > 2^{\log 3} \cdot 2^n = 2^{\log 3 + n}$$

$$\Leftrightarrow r > \log 3 + n$$

$$\therefore r = \lceil \log 3 + n \rceil = \lceil \log 3 \rceil + n = n + 2 \quad \text{basta}$$

$$\hookrightarrow 1 < \log 3 < 2$$

Por último, si $(G, k) \in \text{GIS}$ y $r = n+2$ entonces

$\Pr(B(G, k) \text{ retorne no})$

$$= \Pr(A(G^{n+2}, 1/2) < (1 + 1/2) 2^n 2^{r(k-1)}) \quad / \text{ por la herramienta útil:}$$

$$\leq \Pr(A(G^{n+2}, 1/2) < (1 - 1/2) \# \text{MIS}(G^{n+2}))$$

$$\leq \Pr(A(G^{n+2}, 1/2) < (1 - 1/2) \# \text{MIS}(G^{n+2})) \quad \checkmark$$

$$A(G^{n+2}, 1/2) > (1 + 1/2) \# \text{MIS}(G^{n+2})$$

$$= 1 - \Pr(A(G^{n+2}, 1/2) \geq (1 - 1/2) \# \text{MIS}(G^{n+2})) \quad \wedge$$

$$A(G^{n+2}, 1/2) \leq (1 + 1/2) \# \text{MIS}(G^{n+2}))$$

$$= 1 - \Pr(|A(G^{n+2}, 1/2) - \# \text{MIS}(G^{n+2})| \leq 1/2 \# \text{MIS}(G^{n+2}))$$

$$\leq 1 - 3/4 = 1/4$$

$$\geq 3/4$$

Luego $\text{GIS} \in \text{BPP}$

$$\Rightarrow \text{NP} \subseteq \text{BPP}.$$