



Ejercicio #7: $\#P \subseteq FP^{NP}$?

(Hint)

Nicolás Van Sint Jan
 17 de junio, 2020

El teorema de Toda establece que $PH \subseteq P^{\#P}$. Utilizando este teorema demuestre que si $\#P \subseteq FP^{NP}$, entonces $\Sigma_2^P = \Delta_2^P = \Pi_2^P$, vale decir, la jerarquía polinomial colapsa al segundo nivel.

Solución. —

Recordemos como se relacionan las clases Σ_i^P , Δ_i^P y Π_i^P :

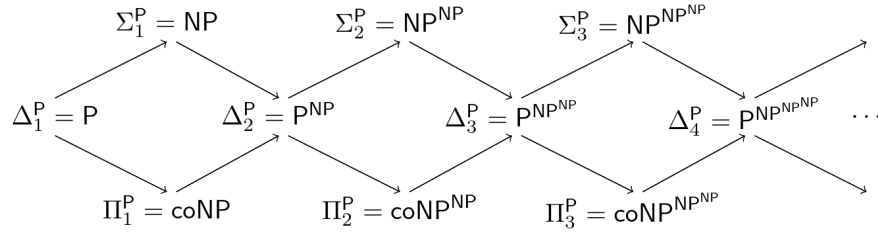
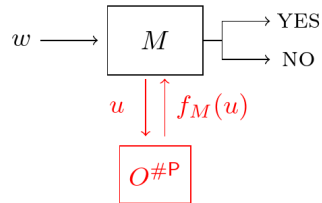


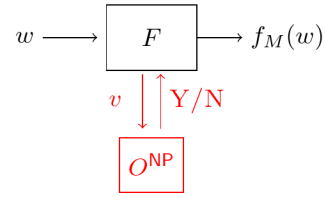
Figura 1: Diagrama de relaciones de clases en PH.

Luego, basta mostrar que si $\#P \subseteq FP^{NP}$ entonces $NP^{NP} \subseteq P^{NP}$ y $coNP^{NP} \subseteq P^{NP}$.

Sea $L \in NP^{NP} \cup coNP^{NP}$. Es claro que $L \in PH$, y luego, por el teorema de Toda, $L \in P^{\#P}$. Esto quiere decir que existe una MT M determinista que funciona en tiempo polinomial con acceso a un oráculo que calcula una función $f_M : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f_M \in \#P$.



(a) Máquina M para $L \in P^{\#P}$.



(b) Máquina F para $f_M \in FP^{NP}$.

Ahora, asumiendo que $\#P \subseteq FP^{NP}$, entonces existe una MTC F determinista que funciona en tiempo polinomial con acceso a un oráculo que decide un lenguaje en NP tal que F calcula f_M .

Ahora mostramos que $L \in \mathsf{P}^{\mathsf{NP}}$. Sea M' una MT tal que con entrada $w \in \Sigma^*$:

1. Simula la ejecución de M sobre w mientras esta no haga un llamado a su oráculo.
2. Si M hace una consulta $u \in \Sigma^*$ al oráculo, ejecuta F sobre u .
3. Una vez que F entrega $f(u)$, continuamos la ejecución normal de M como si su oráculo hubiese respondido la consulta.

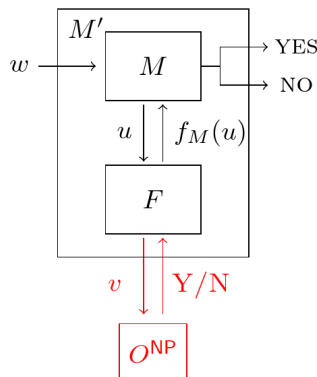


Figura 3: Máquina M' para $L \in \mathsf{P}^{\mathsf{NP}}$.

La máquina M' es determinista y funciona en tiempo polinomial ya que por cada consulta que hacía M a su oráculo se ejecuta la máquina F que también funciona en tiempo polinomial (composición de polinomios sigue siendo polinomial), y esta vez el oráculo de M' es el mismo que el de F (que decide un lenguaje perteneciente a NP). Entonces $L \in \mathsf{P}^{\mathsf{NP}}$ y consecuentemente, PH colapsa al segundo nivel.