

Ejercicio 6, Guía # 3

Bernardo Subercaseaux

17 de junio de 2020

Teorema 1. Si $\text{FP}^{\text{NP}} \subseteq \#P$, entonces $\text{SpanP} \subseteq \#P$

Demostración. Primero probaremos que $\text{FP}^{\text{NP}} \subseteq \#P$ implica $\text{UP} = \text{NP}$, con la finalidad de utilizar el resultado del Ejercicio 3. Es claro que $\text{UP} \subseteq \text{NP}$ incondicionalmente, puesto que UP se define en base a una restricción sobre NP . Demostremos la dirección opuesta, donde sí utilizaremos nuestra hipótesis. Dado un problema $L \in \text{NP}$ probaremos que $L \in \text{UP}$. Para ello, consideremos la función $f_L : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ definida como

$$f_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \in L \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Es claro que f_L está en FP^{NP} , pues basta con llamar al oráculo en NP que decide si $w \in L$ e imprimir 1 o 0 según su respuesta. Por hipótesis, esto implica $f_L \in \#P$, lo que quiere decir que existe una máquina no determinista y polinomial M_{f_L} que tiene 1 camino aceptante si $w \in L$ y 0 si no. Esta máquina M_{f_L} es la prueba de que $L \in \text{UP}$. Habiendo probado que nuestra hipótesis implica $\text{UP} = \text{NP}$, concluimos que $\text{SpanP} = \#P$, gracias al resultado del Ejercicio 3, de lo cual se desprende el resultado que queríamos demostrar. $\square$