Ejercicios 3 – Pregunta 4 | (Clase TotP)

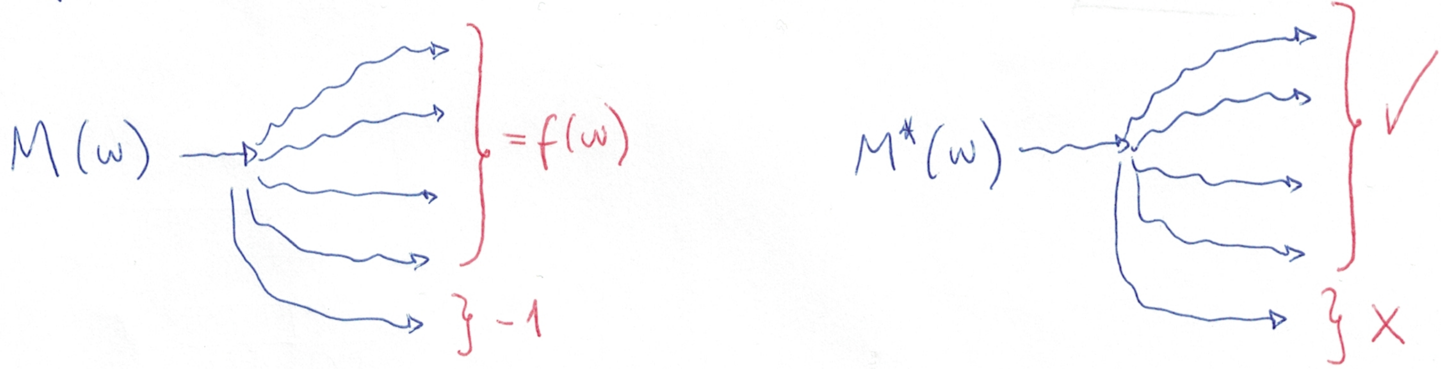
a) PD: $TotP \subseteq \#P$

- Sea $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$, $f \in TotP$

$\Rightarrow$ existe MT no-det M tq $\underbrace{total_M(w) - 1 = f(w)}_{\forall w \in \Sigma^*}$

- Intuición: construir máquina M^*, tq $accept_{M^*}(w) = f(w)$ $(\forall w \in \Sigma^*)$

- A partir de M:



- Cómo elegir una ejecución para rechazarla? (sólo una) (para cada w)

- Similar a cuando vimos que:

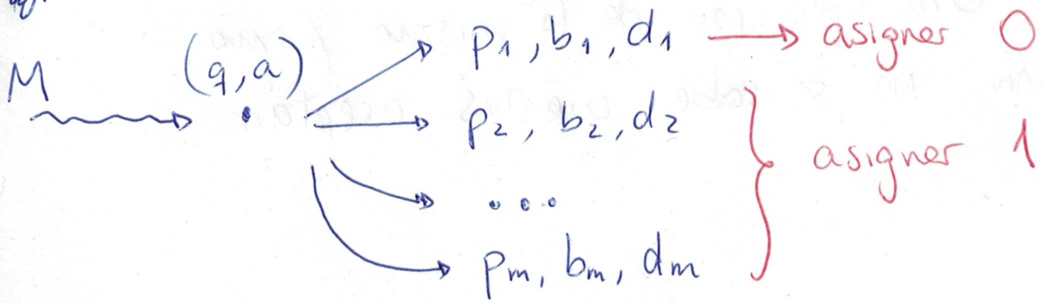
$f \in \#P$ No se puede deducir $f - 1 \in \#P$

- La máquina no podía elegir una ejecución de todas las q aceptan (para rechazarla)
- La diferencia en este caso $\to$ hay que elegir una de todas las ejecuciones

Construcción de M^*

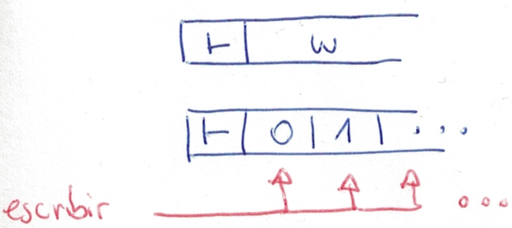
- Sea $M = (Q, \Sigma, T, q_0, \delta, F)$

- Para cada par (q, a) en M revisar "bifurcaciones" (si hay más de una transición posible)



$q, p_i \in Q$
$a, b_i \in T$
$d_i \in \{\leftarrow, \square, \rightarrow\}$
$(q, a, p_i, b_i, d_i) \in \delta$

- M^* tiene mismos estados y transiciones que M
- M^* agrega 2^{da} cinta, comienza vacía.
- al ejecutar ~~esta~~ M^*, si pasa por bifurcación escribe número asignado en 2^{da} cinta:



- Cuando se llega a estado final de M:

  M^* acepta ssi hay algún 1 en 2^{da} cinta

- Con esta construcción, se cumplirá:

$$\mathrm{accept}_{M^*}(w) = \mathrm{total}_M(w) - 1 = f(w)$$

- Para mostrar que $f \in \#P$ $\longrightarrow$ ① $f(w) = accept_{M^*}(w)$
  $\longrightarrow$ ② M^* funciona en tiempo polinomial

① PD: $\forall w$ se cumple $f(w) = accept_{M^*}(w)$

- Caso 1: $f(w) = 0$

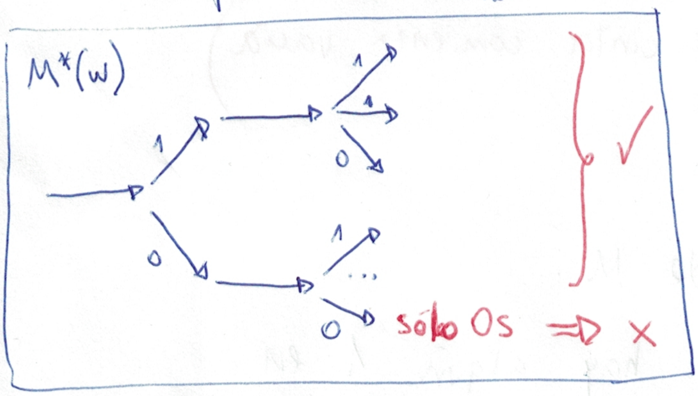
  $\Rightarrow total_M(w) = 1 \Rightarrow$ No pasa por bifurcaciones ejecución $(M \text{ y } M^*)$ $\Rightarrow$ segunda cinta de M^* termina vacía

  $\Rightarrow M^*(w)$ rechaza $\Rightarrow accept_{M^*}(w) = 0 = f(w)$

- Caso 2: $f(w) \geq 1$

  $\Rightarrow total_M(w) \geq 2 \Rightarrow$ ejecución pasa por al menos 1 bifurcación

  - Por construcción sólo un camino termina con sólo 0s en la segunda cinta



$\Rightarrow accept_{M^*}(w) = total_M(w) - 1$
$= f(w)$

② PD: M^* funciona en t' polinomial

- hace los mismos pasos que M
- al final revisa segunda cinta buscando algún 1
- segunda cinta tiene a lo más la cantidad de pasos de $M(w)$
- M^* hace a lo más el doble de pasos de $M(w)$

$\Rightarrow M^*$ en t' polinom.

$\Rightarrow \quad f \in \#P \quad \Rightarrow \quad \boxed{TotP \subseteq \#P}$

- Comentario: en el problema de $(f \in \#P \rightsquigarrow f-1 \in \#P)$ NO se puede quitar una ejecución de la misma forma, pq en una bifurcación NO se sabe cuántas aceptan

b) PD: #DNF-SAT $\in$ TotP

- Construir máq M No-det tq $total_M(\varphi) - 1 = $ #DNF-SAT(φ)

(No importa si c/camino acepta o rechaza)

- Recibe φ en DNF con m variables $p_1, p_2, \dots p_m$
- Idea:
  ↳ Similar a SAT ⟶ adivinar valuación
  ↳ en c/paso sólo abrir caminos si se va a llegar a valuación que satisface
  ⟹ No quedar con ramas que rechacen.
  ↳ Recordar que DNF-SAT(φ) se resuelve en tiempo polinom.

- Notación: $\varphi_{p=0}$: fórmula que resulta de "reemplazar" $p=0$ en φ

ejemplo: $\varphi = (\underbrace{p}_{T} \wedge q \wedge r) \vee (\underbrace{\neg p}_{F} \wedge \neg q)$

$\varphi_{p=1} = (q \wedge r)$

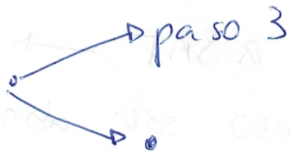
- M hace lo siguiente:

1) Resuelve DNF-SAT (φ). Si no es SAT $\Rightarrow$ se detiene

$$\left(\#DS(\varphi) = 0 \quad , \quad \#\text{caminos}(\varphi) = 1 \right)$$

2) Decide no-det si seguir por ejecución dummy que se detiene, o seguir paso 3

(Sirve para -1)



3) Ejecuta:

Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$

- Sean $\alpha = \varphi_{p_i=0}$, $\beta = \varphi_{p_i=1}$
- Resolver $DS(\alpha)$ y $DS(\beta)$
- Si α y β son SAT
  - elige no-det $K \in \{0,1\}$ (2 caminos)
  - reemplaza $p_i = K$ en φ
- Si sólo α es SAT (No abre caminos)
  - reemplaza $p_i = 0$ en φ
- Si solo β es SAT
  - reemplaza $p_i = 1$ en φ (No abre caminos)

(No ocurre que ambas sean NO SAT, pq φ comienza siendo SAT, y en c/paso se mantiene SAT)

- Con este procedimiento de M se cumple que

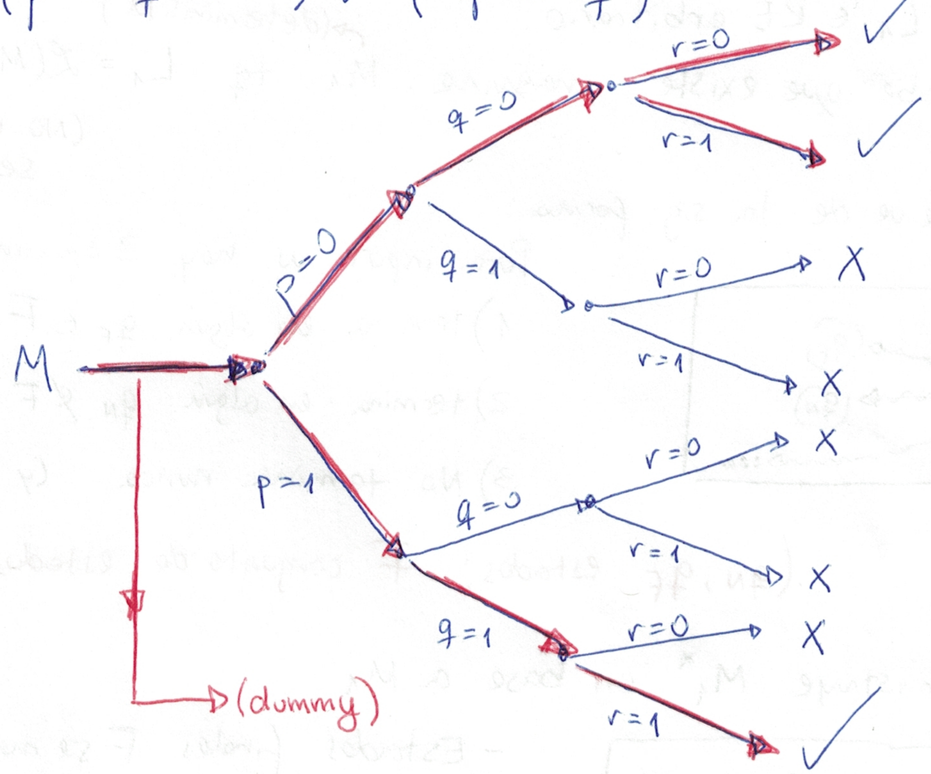
$$\#\text{DNF-SAT}(\varphi) = \text{total}_M(\varphi) - 1 \quad \left(\text{y } M \text{ funciona en t' polinomial}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \#\text{DNF-SAT} \in \text{TotP}}$$

- Ejemplo:

$$\varphi = (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

p	q	r	
0	0	0	✓
0	0	1	✓
0	1	0	X
0	1	1	X
1	0	0	X
1	0	1	X
1	1	0	X
1	1	1	✓



- En azul: Máq típica que resuelve SAT
- En rojo: Máq M construida

- La clave es que M sólo "abre" los caminos que llegan a valuaciones que satisfacen φ.

$\Rightarrow$ cantidad de caminos (−1) = cantidad de valuaciones

- Dado máquina M construida:

PD: $\#\text{DNF-SAT}(\varphi) = \text{total}_M(\varphi) - 1$

- Si φ NO es SAT $\Rightarrow$ #caminos $= 1$
  y $\#DS(\varphi) = 0$

  Se cumple ✓

- Supones que φ es SAT

PD: #caminos paso ③ $= \#DS(\varphi)$

(#caminos paso ③ $= \text{total}(\varphi) - 1$ por camino dummy)

(*) - Notar que para cualquier fórmula ψ y variable p, se cumple:

$$\#\text{DNF-SAT}(\psi) = \#DS(\psi_{p=0}) + \#DS(\psi_{p=1})$$

- Inducción sobre número de variables n (de φ)

Caso base: $n = 1$, una variable p.

- Sean valuaciones $\sigma_0 : p \to 0$, $\sigma_1 : p \to 1$
- Si $\sigma_0(\varphi) = 1$ y $\sigma_1(\varphi) = 1 \Rightarrow \#DS(\varphi) = 2$
  y #caminos $= 2$ (α y β son SAT)
- Si $\sigma_0(\varphi) = 1$ y $\sigma_1(\varphi) = 0 \Rightarrow \#DS(\varphi) = 1$
  y #caminos $= 1$ (α es SAT)
- Idem para $\sigma_0(\varphi) = 0$ y $\sigma_1(\varphi) = 1$
  ($\sigma_0(\varphi) = \sigma_1(\varphi) = 0$ no puede ocurrir, φ es SAT)

$\Rightarrow$ caso base se cumple.

paso inductivo: Suponer que para cualquier ψ con n variables se cumple $\#caminos = \#DS(\psi)$

PD: ~~sean~~ $\#caminos = \#DS(\varphi)$, para φ con $n+1$ vars.

- Sea var p, $\alpha = \varphi_{p=0}$, $\beta = \varphi_{p=1}$
- Si α y β son SAT

$\Rightarrow \#caminos(\varphi) = \#caminos(\alpha) + \#caminos(\beta)$ (abre 2 caminos no-Det)

(HI) $\Rightarrow \#caminos(\varphi) = \#DS(\alpha) + \#DS(\beta)$

(*) $\Rightarrow \#caminos(\varphi) = \#DS(\varphi)$

- Si sólo α es SAT

$\Rightarrow \#caminos(\varphi) = \#caminos(\alpha)$ (ejecución sólo sigue con α, no β)

(HI) $\Rightarrow = \#DS(\alpha)$

$= \#DS(\alpha) + \underbrace{\#DS(\beta)}_{=0,\ \beta \text{ no es SAT}}$

(*) $\Rightarrow \#caminos(\varphi) = \#DS(\varphi)$

- idem si ~~β~~ sólo β es SAT
- No puede ocurrir que α y β no sean SAT a la vez, porque φ es SAT.

$\Rightarrow$ Se cumple para paso inductivo.

$\Rightarrow \#DNF\text{-}SAT(\varphi) = \cancel{\#}\ total_M(\varphi) - 1$

c)

PD: $\#P \subseteq FP^{TotP}$

- $\#$DNF-SAT es $\#$P-hard bajo $\leq_T^P$ (clases)

(por def hardness) $\Rightarrow \forall f \in \#P, \quad f \leq_T^P \#\text{DNF-SAT}$

(def M con oráculo) $\Rightarrow \quad f \in FP^{\#\text{DNF-SAT}}$

($\#$DNF-SAT $\in$ TotP) $\Rightarrow \quad f \in FP^{TotP} \quad \Rightarrow \underline{\#P \subseteq FP^{TotP}}$