Ejercicio 3

Definición de UP: $L \in UP$ ssi $\exists$ una MT M no determinista polinomial tq $\forall w \in \Sigma^*$

$w \in L \rightarrow accept_M(w) = 1$

$w \notin L \rightarrow accept_M(w) = 0$

Demostrar que $\#P = SpanP$ ssi $UP = NP$

($\Leftarrow$) $UP = NP \Rightarrow \#P = SpanP$

1) p.d. $\#P \subseteq SpanP$

sea $f \in \#P$, entonces $\exists$ MT M_a tq $\forall w \in \Sigma^*$ $f(w) = accept_{M_a}(w)$

Entonces podemos definir una MTC M_c que simula a M_a y en cada paso ~~imprime~~ escribe el ID de la transición utilizada (podemos imaginar cada transición etiquetada con un ID distinto).

Es claro que $output_{M_c}(w) = accept_{M_a}(w) = f(w)$ $\forall w \in \Sigma^*$

$\Rightarrow f \in SpanP$ ▫

2) p.d. $SpanP \subseteq \#P$

sea $f \in SpanP$, entonces $\exists$ MTC M_c tq $\forall w \in \Sigma^*$ $f(w) = output_{M_c}(w)$

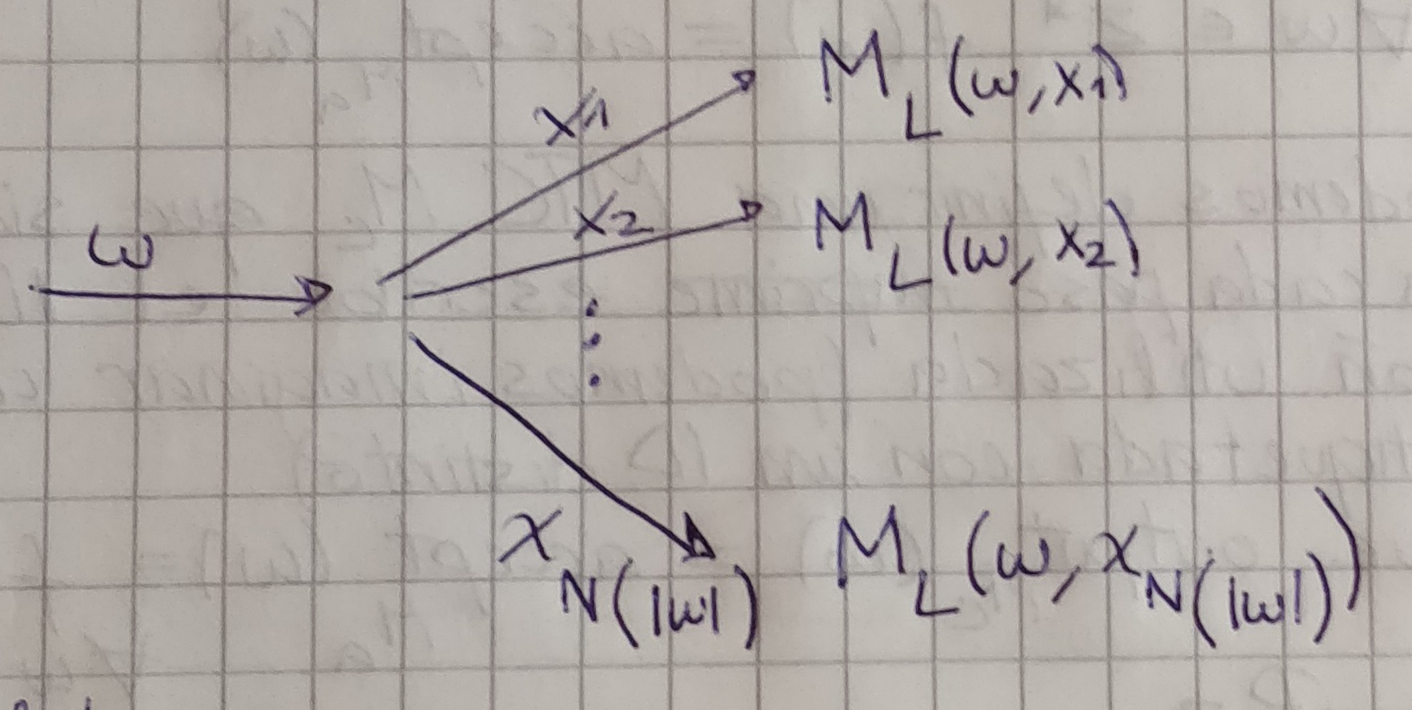
Sea $outputset_{M_c}(w)$ = el conjunto de salidas distintas para w. Notar que $output_{M_c}(w) = |outputset_{M_c}(w)|$

Además definimos el lenguaje:

$$L = \{ (w, x) \mid x \in outputset_{M_c}(w) \}$$

Notar que $L \in NP$ (basta simular M_c y comparar) y por tanto $L \in UP$.

Así, podemos definir la sig. máquina M:



En palabras, básicamente adivinamos un string $x \in \Sigma^*$ hasta un largo máximo $P(|w|)$ polinomial garantizando que todos los posibles outputs de M_c corrido sobre w estén ahí (ya que M_c corre en tiempo polinomial), y por cada x adivinado vemos si efectivamente estaba en $outputset_{M_c}(w)$ usando la máquina M_L en UP de L.

Es evidente que $accept_M(w) = output_{M_c}(w) = f(w)$

$\Rightarrow f \in \#P$ ▪

($\Rightarrow$) $\#P = SpanP \Rightarrow UP = NP$

1) p.d. $UP \subseteq NP$: obvio ▪

2) p.d. $NP \subseteq UP$.

Sea $L \in NP$, entonces $\exists$ una MT M no determinista tq. $L(M) = L$.

Podemos definir entonces una MTC M_c que simula M y cuando acepta escribe "yes".

Así la función $f: \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$ dada por

$f(w) = output_{M_c}(w)$ está en SpanP.

Como $SpanP = \#P$, entonces $f \in \#P$

$\Rightarrow \exists$ una MT M_a tq $f(w) = accept_{M_a}(w)$

Luego, si $w \in L \Rightarrow accept_{M_a}(w) = 1$

si $w \notin L \Rightarrow accept_{M_a}(w) = 0$

$\Rightarrow L \in UP$ ▪