



Tópicos Avanzados en Teoría de Computación

Sea M una MTC que funciona en tiempo polinomial, con alfabeto de entrada y salida Σ . sea $w \in \Sigma^*$, se dice que $w' \in \Sigma^*$ es una salida para w , si una ejecución de M con entrada w , se detiene en estado de aceptación habiendo escrito w' en la cinta.

Definimos $\text{output}_M(w)$ como el número de salidas distintas de M para w

SpanP

Una función $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ está en **SpanP**, si existe una MTC no determinista M , con alfabeto de entrada y salida Σ , funciona en tiempo polinomial y $f(w) = \text{output}_M(w)$

$\# \cdot \text{NP}$

Una función $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ está en $\# \cdot \text{NP}$, si existe una Relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ y un polinomio $p(n)$ tal que

- si $(x, y) \in R$, entonces $|y| \leq p(|x|)$
- $\forall x \in \Sigma^*$, se tiene que $f(x) = |\{y \in \Sigma^* \mid (x, y) \in R\}|$
- $R \in \text{NP}$

$\text{SpanP} \subseteq \# \cdot \text{NP}$

Sea $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$, una función tal que $f \in \text{SpanP}$

Entonces existe una MTC no determinista M , tal que $\forall w \in \Sigma^*$ $\text{output}_M(w) = f(w)$

Definamos una relación $R_M \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ tal que $\forall w \in \Sigma^*$ si x es una salida para w en M , entonces $(w, x) \in R_M$. Notemos que:

- $\forall (x, y) \in R_M$, x es una entrada para M y y alguna de sus salidas. Como M ejecuta en tiempo polinomial, debe existir un polinomio $p(n)$ tal que $|y| \leq p(|x|)$
- $\forall z \in \Sigma^*$, si z es salida para w en M , entonces $(w, z) \in R_M$, entonces el número de salidas para w corresponde con cantidad de pares en R_M , con primer elemento w . en otras palabras $|\{z \in \Sigma^* \mid (w, z) \in R_M\}| = \text{output}_M(w) = f(w)$
- Definamos ahora una MT no determinista S que recibe como input un par (x, y) , y simula M con input x . Si y es una salida para x en M , entonces acepta en caso contrario rechaza. Con esto demostramos entonces que $R_M \in \text{NP}$

Podemos observar que las tres implicancias anteriores, corresponden con la clase de funciones $\# \cdot \text{NP}$, y podemos afirmar que $f \in \# \cdot \text{NP}$. Lo que significa que $\text{SpanP} \subseteq \# \cdot \text{NP}$

· NP ⊆ SpanP

Sea $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$, una función tal que $f \in \# \cdot \text{NP}$ Entonces existe una relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, y un polinomio $p(n)$, tal que:

- $\forall (x, y) \in R \ |y| \leq p(|x|)$
- $f(x) = |\{y \in \Sigma^* \mid (x, y) \in R\}|$
- $R \in \text{NP}$

Dado que R está en NP , entonces sabemos que existe una MT no determinista, llamémosle S , tal que recibe como input un string de la forma (x, y) y acepta si $(x, y) \in R$, y rechaza en caso contrario.

Definamos una MTC no determinista M , tal que, para todo input $w \in \Sigma^*$, esta máquina genera un string en la cinta de la forma (w, y) para algún $y \in \Sigma^*$ tal que $|y| \leq p(|w|)$, y simula S con input (w, y) .

- Si S acepta, entonces M deja y escrito en la cinta y acepta.
- Si S rechaza, entonces M también.

Notemos lo siguiente:

- Cada ejecución de la máquina M toma tiempo polinomial, puesto que la generación del string y , toma tiempo polinomial, dado por esto: $\forall (x, y) \in R \ |y| \leq p(|x|)$. Y luego la ejecución de S también es polinomial, dado $R \in \text{NP}$.
- $\forall w \in \Sigma^*$, podemos notar que, por cómo está definida M $\text{output}_M(w) = |\{y \in \Sigma^* \mid (w, y) \in R\}| = f(w)$

Lo anterior implica lo siguiente para M , Tiene alfabeto de entrada y salida Σ , funciona en tiempo polinomial y $\text{output}_M(w) = f(w)$ Por lo tanto podemos afirmar que $f \in \text{SpanP}$. Finalmente $\# \cdot \text{NP} \subseteq \text{SpanP}$

$$\# \cdot \text{NP} \subseteq \text{SpanP} \wedge \text{SpanP} \subseteq \# \cdot \text{NP} \Rightarrow \# \cdot \text{NP} = \text{SpanP}$$