



Ejercicio #3: Nociones de reducción en RP y co-RP

Nicolás Van Sint Jan
 22 de abril, 2020

Demuestre que las clases RP y co-RP son cerradas bajo la noción de reducción $\leq_m^p$. ¿Son estas clases cerradas bajo la noción de reducción $\leq_T^p$? Justifique su respuesta.

Solución. —

Sin pérdida de generalidad, demostramos que la clase RP es cerrada bajo la noción de reducción $\leq_m^p$ (Karp), el argumento es simétrico para el caso de co-RP. Para esto, debemos demostrar que

$$\forall A \in 2^{\Sigma^*}. \forall B \in \text{RP}. A \leq_m^p B \rightarrow A \in \text{RP}$$

Recordamos que un lenguaje B sobre un alfabeto Σ está en RP si existe una MT probabilística $\mathcal{M}_1$ tal que $t_{\mathcal{M}_1}(n)$ es $n^{O(1)}$ y para cada $x \in \Sigma^*$:

- Si $x \in B$, entonces $\Pr(\mathcal{M}_1 \text{ acepta } x) \geq \frac{3}{4}$
- Si $x \notin B$, entonces $\Pr(\mathcal{M}_1 \text{ acepta } x) = 0$

También, si $A \leq_m^p B$, entonces existe una MT $\mathcal{M}_f$ tal que $t_{\mathcal{M}_f}(n)$ es $n^{O(1)}$ y que dado un input $x \in \Sigma^*$ escribe un $f(x)$ tal que $x \in A \leftrightarrow f(x) \in B$.

Dado esto, es bastante simple construir una TM probabilística $\mathcal{M}_2$ tal que dada una entrada $x \in \Sigma^*$ y $s \in \{0, 1\}^\omega$:

1. Escribe $f(x)$ en la primera cinta de independiente de lo leído por el cabezal en la segunda cinta.
2. Simula $\mathcal{M}_1(f(x), s')$, siendo s' el string s a partir de la posición final del cabezal en el paso anterior.

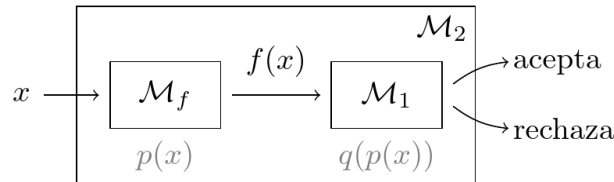


Figura 1: Diagrama de $\mathcal{M}_2$

La MT $\mathcal{M}_2$ es tal que cumple con las condiciones de pertenencia a RP acorde al lenguaje A . Por lo que concluimos que $A \in \text{RP}$.

¿Se cumplirá lo mismo para la noción de reducción $\leq_T^p$ (Cook)? Consideremos el problema EQUIV-POL visto en clases. Sea $\mathcal{M}$ una MT determinista con oráculo para EQUIV-POL tal que sobre una entrada $x \in \Sigma^*$:

1. Escribe x en la cinta de consulta y entra al estado $q_?$.
2. Si el oráculo entrega q_{YES} , la máquina rechaza.
3. Si el oráculo entrega q_{NO} , la máquina acepta.

Es claro que $t_{\mathcal{M}}(n)$ es $n^{O(1)}$ y que el lenguaje aceptado por $\mathcal{M}$ es $\overline{\text{EQUIV-POL}}$, por lo tanto

$$\overline{\text{EQUIV-POL}} \in \text{PTIME}^{\text{EQUIV-POL}},$$

es decir, $\overline{\text{EQUIV-POL}} \leq_T^p \text{EQUIV-POL}$. Como $\text{EQUIV-POL} \in \text{co-RP}$, encontramos un lenguaje en RP que es Turing-reducible a su complemento. El mismo argumento puede realizarse para cualquier $L \in \text{RP}$, de manera que no es claro si RP es cerrado bajo esta noción de reducción ya que eso implicaría que $\text{RP} = \text{co-RP}$ (de hecho el mismo argumento puede realizarse para cualquier clase de complejidad cuya clausura respecto a complemento es un problema abierto).