3-CNF-SAT < EVAL

Wednesday, March 25, 2020 3:15 PM

2. **[Responsable: Tamara Cucumides]** De una reducción polinomial de 3-CNF-SAT al problema EVAL definido en clases, vale decir, demuestre que 3-CNF-SAT $\leq_m^p$ EVAL.

$$\text{EVAL} = \{(e,k) \mid e \text{ es una expresión aritmética, } k \text{ es un número natural y } k \in L(e)\}$$

$$\text{SUBSET-SUM} = \{(S,k) : S = \{n_1, \dots, n_N\} \wedge n_i \in \mathbb{N}\ i = 1, \dots, N \wedge \text{existe } S' \subseteq S : \sum_{n \in S'} n = k\}$$

El procedimiento que propongo es demostrar que:

(1) 3-CNF-SAT $\leq_m^p$ SUBSET-SUM

(2) SUBSET-SUM $\leq_m^p$ EVAL

(1) 3-CNF-SAT $\leq_m^p$ SUBSET-SUM

Sea ψ una fórmula proposicional en 3-CNF con variables $x_1, \dots, x_n$ y clausulas $C_1, \dots, C_m$.

La reducción va de la siguiente manera:

- Para cada x_i crearé 2 números y_i y z_i
- Para cada C_j crearé 2 números t_j y s_j

¿Cómo se construyen estos números?

Ejemplo

$\psi = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}),$

S:

	x_1	x_2	x_3	c_1	c_2
y_1	1	0	0	1	0
z_1	1	0	0	0	1
y_2	0	1	0	1	1
z_2	0	1	0	0	0
y_3	0	0	1	0	0
z_3	0	0	1	1	1
s_1	0	0	0	1	0
t_1	0	0	0	1	0
s_2	0	0	0	0	1
t_2	0	0	0	0	1
k	1	1	1	3	3

{ nota: los n's están en repr. decimal }

$k = \underbrace{1 \ldots 1}_{\#\text{ vars}} \underbrace{3 \ldots 3}_{\#\text{ claus.}}$

p.d: $\psi \in$ 3-CNF-SAT ssi $(S, k) \in$ SUBSET-SUM

$\Rightarrow$) Sea $\overline{v}$ una valuación tq $\overline{v}(\psi) = 1$, construimos el $S' \subseteq S$ que cumple $\sum_{n \in S'} n = k$ de la siguiente manera

Para cada x_i:

- Si $\overline{v}(x_i) = 1$
  $\Rightarrow y_i \in S'$
- Si $\overline{v}(\neg x_i) = 1$
  $\Rightarrow z_i \in S'$

Para cada c_j:

- Si se cumplen 1 literal de c_j:
  ↳ agrego s_j, t_j a S'
- Si se cumplen 2:
  ↳ agrego s_j
- Si se cumplen los 3: PASS

Por construccion S' cumple $\sum_{n \in S'} n = k$

$\Leftarrow)$ Si $(S, k) \in$ SUBSET-SUM ; sea S' el subconjunto que hace la suma, entonces construyamos $\bar{v}$ tq $\bar{v}(\psi) = 1$.

- Necesariamente $\forall i$ se cumple que $y_i \in S'$ ó $z_i \in S'$, pero no ambos
  - ↳ Si $y_i \in S' \Longrightarrow \bar{v}(x_i) = 1$
  - Si $z_i \in S' \Longrightarrow \bar{v}(\neg x_i) = 1$

De nuevo por construcción, esta valuación debe satisfacer ψ (para cada claus. C_j a lo más sumo 2 con el s_j y t_j)

SUBSETSUM < EVAL

Wednesday, March 25, 2020 5:28 PM

Sea $S = \{n_1, \ldots, n_N\}$, $k \in \mathbb{N}$;

construimos la sgte expresión aritmética:

$$e = \{0 \cup n_1\} + \{0 \cup n_2\} + \{0 \cup n_3\} + \ldots + \{0 \cup n_N\}$$

Veamos que

$(S, k) \in$ SUBSET-SUM sii $(e, k) \in$ EVAL

$\Rightarrow$) Sea $S' \subseteq S$ tq $\sum_{n \in S'} n = k$; por construcción de e tendremos que $(e, k) \in$ EVAL

$\Leftarrow$) Si $(e, k) \in$ EVAL, entonces existe un subconjunto S' de S tq $\sum_{n \in S'} n = k$.

$\blacksquare$