



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Tópicos Avanzados en Teoría de la Computación - IIC3810
Lista de Ejercicios 3

1. **[Responsable: Vicente Errazuriz]** Dado un grafo $G = (N, A)$, decimos que $S \subseteq N$ es un conjunto independiente si para cada $a, b \in S$ se tiene que $(a, b) \notin A$. Además, definimos #GIS como una función que, dado un grafo G y un número natural k , retorna el número de conjuntos independientes S de G tales que $|S| \geq k$. Demuestre que #GIS es #P-completo bajo reducciones parsimoniosas.
2. **[Responsable: Matías Eynaudi]** Sea M una MTC no determinista que funciona en tiempo polinomial y tiene alfabeto de entrada y salida Σ , y sea $w \in \Sigma^*$. Decimos que una palabra $w' \in \Sigma^*$ es una salida para w si existe una ejecución de M con entrada w que se detiene en un estado final y retorna w' (al detenerse la cinta de salida de M tiene a la palabra w' precedida del símbolo $\vdash$ y seguida por una secuencia infinita de símbolos B). Además, definimos $\text{output}_M(w)$ como el número de salidas distintas para w . Finalmente, definimos SpanP como la siguiente clase de funciones. Una función $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ está en SpanP si y sólo si existe una MTC no determinista M tal que el alfabeto de entrada y salida de M es Σ , M funciona en tiempo polinomial y $f(w) = \text{output}_M(w)$ para cada palabra $w \in \Sigma^*$.
Por otro lado, definimos $\# \cdot \text{NP}$ como la siguiente clase de funciones. Una función $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ está en $\# \cdot \text{NP}$ si y sólo si existe una relación $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ y un polinomio $p(n)$ tal que: (i) si $(x, y) \in R$, entonces $|y| \leq p(|x|)$; (ii) para cada $x \in \Sigma^*$, se tiene que $f(x) = |\{y \in \Sigma^* \mid (x, y) \in R\}|$; y (iii) $R \in \text{NP}$. En esta pregunta usted debe demostrar que $\text{SpanP} = \# \cdot \text{NP}$.
3. **[Responsable: Pablo Messina]** Defina UP como la siguiente clase de lenguajes (UP es una clase de problemas de decisión). Un lenguaje L sobre un alfabeto Σ está en UP si y sólo si existe una MT M no determinista tal que el alfabeto de entrada de M es Σ , M funciona en tiempo polinomial y para todo $w \in \Sigma^*$:
 - si $w \in L$, entonces $\text{accept}_M(w) = 1$, y
 - si $w \notin L$, entonces $\text{accept}_M(w) = 0$.Nótese que $\text{UP} \subseteq \text{NP}$. Demuestre que $\#P = \text{SpanP}$ si y sólo si $\text{UP} = \text{NP}$.
4. **[Responsable: Pablo Pino]** Sea M una MT no determinista que funciona en tiempo polinomial y tiene alfabeto de entrada Σ , y sea $w \in \Sigma^*$. Definimos $\text{total}_M(w)$ como el número total de ejecuciones de M con entrada w (sin importar si la ejecución termina en un estado final).
Defina TotP como la siguiente clase de funciones. Una función $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ está en TotP si y sólo si existe una MT no determinista M tal que el alfabeto de entrada de M es Σ , M funciona en tiempo polinomial y $f(w) = \text{total}_M(w) - 1$ para cada $w \in \Sigma^*$.
 - (a) Demuestre que $\text{TotP} \subseteq \#P$.

- (b) Demuestre que $\# \text{DNF-SAT} \in \text{TotP}$, y desde esto concluya que $\#P \subseteq \text{FP}^{\text{TotP}}$.
5. [**Responsable: Pablo Rojas**] Demuestre que para cada $f \in \text{TotP}$, se tiene que $L_f \in \text{PTIME}$. Nótese que de esto se concluye que $\# \text{SAT} \notin \text{TotP}$, a menos que $\text{PTIME} = \text{NP}$.
6. [**Responsable: Bernardo Subercaseaux**] Demuestre que si $\text{FP}^{\text{NP}} \subseteq \#P$, entonces $\text{SpanP} \subseteq \#P$.
7. [**Responsable: Nicolás Van Sint Jan**] El teorema de Toda establece que $\text{PH} \subseteq \text{PTIME}^{\#P}$. Utilizando este teorema demuestre que si $\#P \subseteq \text{FP}^{\text{NP}}$, entonces $\Sigma_2^P = \Delta_2^P = \Pi_2^P$, vale decir, la jerarquía polinomial colapsa al segundo nivel.