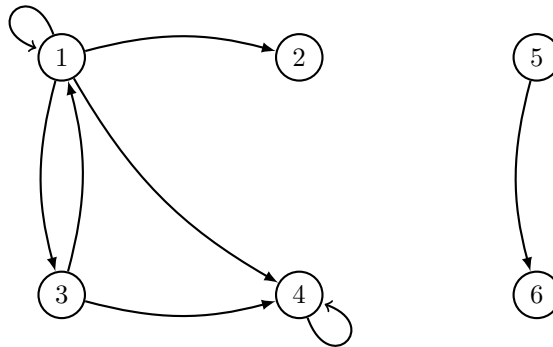




Tópicos Avanzados en Teoría de la Computación - IIC3810
Lista de Ejercicios 5

1. [**Responsable: Raimundo Manterola**] Sea $n \geq 1$ y Ω el conjunto de todas las listas de largo n con elementos $1, 2, \dots, n$ (en particular, estas listas no tienen elementos repetidos). Considere una cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ con conjunto de estados Ω cuya dinámica está dada por el siguiente procedimiento. Dada una lista L , la siguiente lista es seleccionada escogiendo $i, j \in \{1, \dots, n\}$ con distribución uniforme y de manera independiente, intercambiando $L[i]$ por $L[j]$ en L , y finalmente retornando L .
 - (a) Dado $L \in \Omega$, calcule $\Pr(X_1 = L \mid X_0 = L)$
 - (b) Dados $L_1, L_2 \in \Omega$ con $L_1 \neq L_2$, calcule $\Pr(X_1 = L_2 \mid X_0 = L_1)$.
 - (c) Demuestre que la cadena de Markov es irreducible y aperiódica.
 - (d) Encuentre la distribución estacionaria de la cadena de Markov. ¿Para qué puede ser usada esta cadena de Markov?
2. [**Responsable: Andrés Quintana**] Construya una cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ tal que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ tiene un conjunto finito de estados Ω , $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ es aperiódica, para cada $a, b \in \Omega$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(X_n = a \mid X_0 = b)$ existe, y existen estados $a, b, c \in \Omega$ para los cuales $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(X_n = a \mid X_0 = b) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(X_n = a \mid X_0 = c)$.
3. [**Responsable: Ricardo Rodríguez**] Construya una cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ tal que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ tiene un conjunto finito de estados Ω , $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ es irreducible y existen estados $a, b \in \Omega$ para los cuales $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(X_n = a \mid X_0 = b)$ no existe.
4. [**Responsable: Alfonso Valdés**] Considere una pequeña Web que consiste de las siguientes páginas y links:



Calcule el ranking de cada página para $\alpha = 0.85$, $\alpha = 0.5$ y $\alpha = 0.15$.

5. **[Responsable: Sebastián Amenábar]** Dado un estado b en una cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, recuerde que en clases demostramos que b es recurrente si y sólo si

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \Pr(X_n = b \mid X_0 = b) = \infty.$$

Utilizando esta propiedad, demuestre que en una cadena de Markov irreducible, se tiene que todos los estado son recurrentes o todos los estados son transitorios.

6. **[Responsable: Andrés Espinosa]** Utilizando el resultado en el ejercicio anterior, demuestre que en una cadena de Markov irreducible y con un conjunto finito de estados, se tiene que todos los estado son recurrentes.