

Matchings de un grafo: caminos canónicos

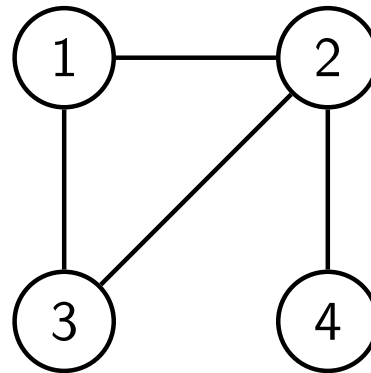
Sea G un grafo no dirigido.

Suponemos dado un orden lineal para el conjunto de los caminos y ciclos simples en G , y suponemos que cada uno de ellos tiene un vértice inicial.

- ▶ Si el camino no es un ciclo, el vértice inicial tiene que ser un extremo
- ▶ Si el camino es un ciclo, el vértice inicial es un nodo arbitrario

Ejemplo de un orden sobre los caminos y ciclos simples

Considere el siguiente grafo:



Ejemplo de un orden sobre los caminos y ciclos simples

Un orden lineal para los caminos y ciclos simples:

- ▶ $Q_1 = (1, 2)$
- ▶ $Q_2 = (1, 3, 2)$
- ▶ $Q_3 = (1, 3)$
- ▶ $Q_4 = (1, 2, 3)$
- ▶ $Q_5 = (1, 2, 4)$
- ▶ $Q_6 = (1, 3, 2, 4)$
- ▶ $Q_7 = (1, 2, 3, 1)$
- ▶ $Q_8 = (2, 3)$
- ▶ $Q_9 = (2, 1, 3)$
- ▶ $Q_{10} = (2, 4)$
- ▶ $Q_{11} = (3, 1, 2, 4)$
- ▶ $Q_{12} = (3, 2, 4)$

Ejemplo de un orden sobre los caminos y ciclos simples

Y un vértice inicial para cada camino:

- ▶ $Q_1 = (1, 2)$
- ▶ $Q_2 = (1, 3, 2)$
- ▶ $Q_3 = (1, 3)$
- ▶ $Q_4 = (1, 2, 3)$
- ▶ $Q_5 = (1, 2, 4)$
- ▶ $Q_6 = (1, 3, 2, 4)$
- ▶ $Q_7 = (1, 2, 3, 1)$ (ciclo)
- ▶ $Q_8 = (2, 3)$
- ▶ $Q_9 = (2, 1, 3)$
- ▶ $Q_{10} = (2, 4)$
- ▶ $Q_{11} = (3, 1, 2, 4)$
- ▶ $Q_{12} = (3, 2, 4)$

Definición de los caminos canónicos

Sean $I, F \in \Omega$

Podemos describir la diferencia simétrica $(I \setminus F) \cup (F \setminus I)$ como una secuencia $Q_1, \dots, Q_r$ de caminos y ciclos simples disjuntos que respetan el orden lineal.

- ▶ Construimos el camino canónico de I a F secuencialmente a partir de estos caminos y ciclos simples
 - ▶ Tenemos que tratar a los caminos y ciclos simples de distinta forma

Caso 1: Q_i no es un ciclo

Sea $Q_i = (v_0, v_1, \dots, v_\ell)$, con $v_i \in \Omega$ para todo $i \in \{0, \dots, \ell\}$ y v_0 el vértice inicial

En primer lugar, suponemos que $\{v_0, v_1\} \in F$

- ▶ Realizamos una serie de transiciones de tipo 3, reemplazando $\{v_{2j+1}, v_{2j+2}\}$ por $\{v_{2j}, v_{2j+1}\}$ para $j = 0, 1, \dots$ tal que $2j + 2 \leq \ell$
 - ▶ En cada paso quitamos un arco $\{v_{2j+1}, v_{2j+2}\} \in I$ y agregamos el arco anterior $\{v_{2j}, v_{2j+1}\} \in F$
- ▶ Finalizamos con una transición de tipo 2 si ℓ es impar
 - ▶ Si ℓ es impar, falta considerar el arco $\{v_{\ell-1}, v_\ell\}$, que agregamos a través de una transición de tipo 2

Caso 1: Q_i no es un ciclo

Sea $Q_i = (v_0, v_1, \dots, v_\ell)$, con $v_i \in \Omega$ para todo $i \in \{0, \dots, \ell\}$ y v_0 el vértice inicial

En segundo lugar, suponemos que $\{v_0, v_1\} \in I$

- ▶ Partimos con una transición de tipo 1, removiendo $\{v_0, v_1\}$
- ▶ Procedemos con el camino reducido $(v_1, \dots, v_\ell)$
 - ▶ Nótese que si el camino $(v_1, \dots, v_\ell)$ tiene a v_ℓ como vértice inicial y $\{v_{\ell-1}, v_\ell\} \in I$ entraremos nuevamente en este caso

Caso 2: Q_i es un ciclo

Sea $Q_i = (v_0, v_1, \dots, v_{2\ell+1}, v_0)$, con $v_i \in \Omega$ para todo $i \in \{0, \dots, 2\ell + 1\}$, v_0 el vértice inicial y $\{v_{2j}, v_{2j+1}\} \in I$ para todo $j \in \{0, \dots, \ell\}$

- ▶ El ciclo debe tener un número par de aristas. ¿Por qué?
- ▶ Nótese que el orden del ciclo no es relevante, por lo que si $\{v_{2j}, v_{2j+1}\} \in F$ para todo $j \in \{0, \dots, \ell\}$, podemos considerar el ciclo en el orden invertido y cumplirá con las condiciones pedidas

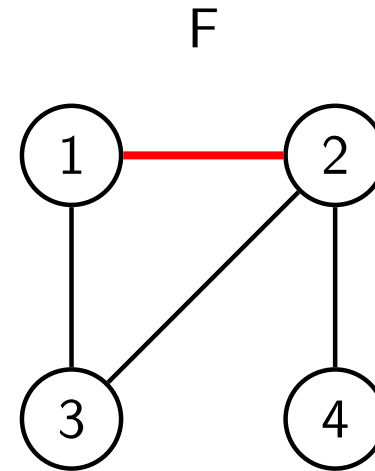
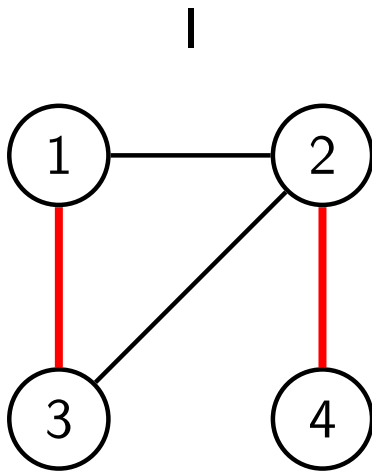
Caso 2: Q_i es un ciclo

Sea $Q_i = (v_0, v_1, \dots, v_{2\ell+1}, v_0)$, con $v_i \in \Omega$ para todo $i \in \{0, \dots, 2\ell + 1\}$, v_0 el vértice inicial y $\{v_{2j}, v_{2j+1}\} \in I$ para todo $j \in \{0, \dots, \ell\}$

- ▶ Partimos con una transición de tipo 1 removiendo $\{v_0, v_1\}$
- ▶ Denotamos al camino simple resultante como $O = (v_1, \dots, v_{2\ell+1}, v_0)$, con extremos v_1, v_0
- ▶ Tratamos a O igual que cualquier camino simple utilizando v_0 o v_1 como el vértice inicial
 - ▶ Se utiliza el orden inverso para O para diferenciar a los ciclos simples de los caminos simples durante el análisis del mixing time de la cadena de Markov

Definición de los caminos canónicos: un ejemplo

Consideremos el ejemplo introducido anteriormente. Supongamos que queremos encontrar el camino canónico entre los siguientes matchings:



Definición de los caminos canónicos: un ejemplo

La diferencia simétrica $(I \setminus F) \cup (F \setminus I) = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2\}\}$, lo que corresponde al camino simple $Q_{11} = (3, 1, 2, 4)$

- ▶ Este camino no es un ciclo y su primera arista es $\{3, 1\} \in I$

Luego, el camino canónico entre estos estados corresponde a:

- ▶ Utilizar una transición de tipo 1 para remover $\{3, 1\}$
- ▶ Utilizar una transición de tipo 3 para remplazar $\{2, 4\}$ por $\{1, 2\}$

Definición de los caminos canónicos: un ejemplo

En un ejemplo más extenso, simplemente realizamos las transiciones correspondientes a cada camino y ciclo simple en el orden establecido entre ellos.

- ▶ Nótese que, dado que los caminos y ciclos simples utilizados tienen que ser disjuntos, solo habrá una forma de crear cada camino canónico

Matchings de un grafo: mixing time

A partir del conjunto de caminos canónicos descritos, podemos establecer la siguiente cota para el mixing time de la cadena.

Suponiendo que el grafo (no dirigido) de entrada es $G = (V, E)$, $M \in \Omega$ es un matching arbitrario de G y $\varepsilon \in (0, 1)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\tau_M(\varepsilon) &\leq 128 \cdot |E|^2 \cdot \left(\ln |\Omega| + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \\ &\leq 128 \cdot |E|^2 \cdot \left(\ln 2^{|E|} + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \\ &= 128 \cdot |E|^2 \cdot \left(|E| \cdot \ln 2 + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)\end{aligned}$$