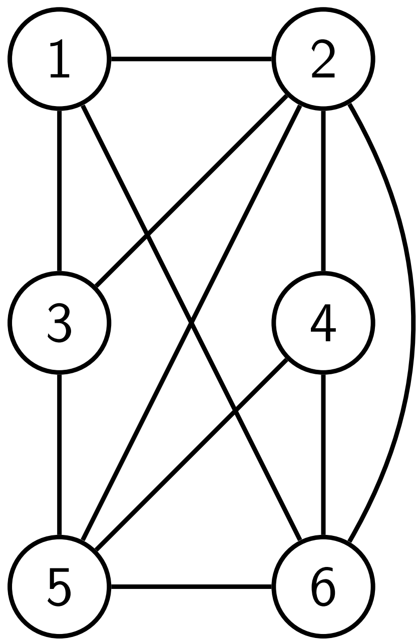
Un tercer ejemplo: matchings de un grafo

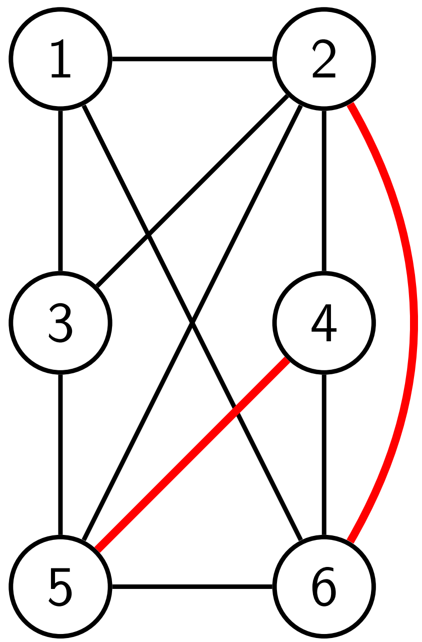
Dado un grafo $G = (V, E)$ no dirigido, un matching en G es un conjunto de arcos $M \subseteq E$ que satisface las siguientes condiciones:

- Ningún arco en M es un loop $\{a, a\} = \{a\}$
- Para cada par de arcos $\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\} \in M$ tales que $\{a_1, b_1\} \neq \{a_2, b_2\}$, se tiene que $\{a_1, b_1\} \cap \{a_2, b_2\} = \emptyset$

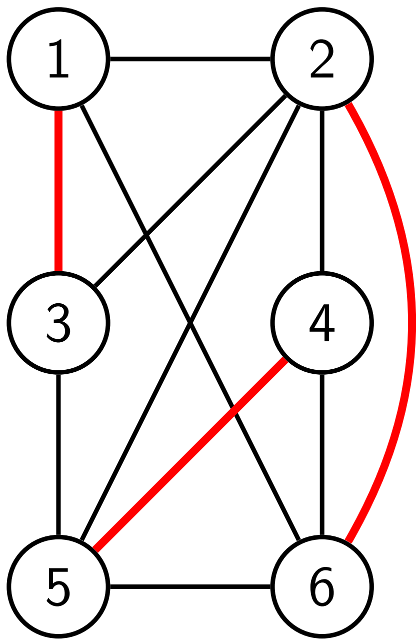
Matchings de un grafo: ejemplos



Matchings de un grafo: ejemplos



Matchings de un grafo: ejemplos



Contando el número de matchings de un grafo

Dado un grafo G no dirigido, sea $\#\text{MATCHING}(G)$ una función que retorna el número de matchings de G

Teorema

$\#$MATCHING es $\#$P-completo y $L_{\#MATCHING} \in PTIME$

Entonces puede existir un FPRAS para $\#$MATCHING

- ¿Qué herramientas podemos usar para construir este FPRAS?

Construyendo un FPRAS para #MATCHING

Considere la siguiente relación:

$$R_{\text{MATCHING}} = \{(G, M) \mid G \text{ es un grafo no dirigido y } M \text{ es un matching de G}\}$$

Proposición

R_{MATCHING} es auto-reducible.

- *¿Cómo puede ser codificado M para que se cumpla esta propiedad?*

Por el teorema de Jerrum, Valiant & Vazirani, necesitamos entonces un FPAUG para R_{MATCHING} para obtener un FPRAS para #MATCHING

- Usamos una cadena de Markov para construir este FPAUG

Una cadena de Markov para los matchings de un grafo

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido

Consideramos una cadena de Markov con conjunto de estados:

$$\Omega = \{M \subseteq E \mid M \text{ es un matching de } G\}$$

Una cadena de Markov para los matchings de un grafo

Dado $M \in \Omega$, el procedimiento para ejecutar una transición es el siguiente:

1. Con probabilidad $\frac{1}{2}$ nos quedamos en M
2. En caso contrario, escogemos un arco $e \in M$, con $e = \{u, v\}$ y $u \neq v$, de manera aleatoria y con distribución uniforme, y hacemos lo siguiente:
   - 2.1 si $e \in M$, nos movemos a $M \smallsetminus \{e\}$
   - 2.2 si $e \cap e' = \emptyset$ para cada $e' \in M$, nos movemos a $M \cup \{e\}$
   - 2.3 si $|e \cap e'| = 1$ para algún $e' \in E$, y $e \cap e'' = \emptyset$ para todo $e'' \in M \smallsetminus \{e'\}$, entonces nos movemos a $(M \smallsetminus \{e'\}) \cup \{e\}$
   - 2.4 en otro caso, nos quedamos en M

Llamamos a los cambios 2.1, 2.2 y 2.3 transiciones tipo 1, 2 y 3, respectivamente

Una cadena de Markov para los matchings de un grafo

Ejercicios

Considere la cadena de Markov definida en las transparencias anteriores.

1. Demuestre que la cadena es irreducible y aperiódica
2. Demuestre que la cadena es reversible y su distribución estacionaria es la distribución uniforme sobre Ω