

Un segundo ejemplo: permutaciones de una lista

Dado $n \geq 2$, consideramos el problema de generar permutaciones aleatorias de una lista con n elementos y sin repeticiones.

Para resolver este problema consideramos una cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ con conjunto de estados Ω tal que:

$$\Omega = \{L \mid L \text{ es una lista de largo } n \text{ con elementos } 1, \dots, n\}$$

Un segundo ejemplo: permutaciones de una lista

La dinámica de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ es definida de la siguiente forma.

- ▶ Dada una lista L :
 - ▶ Con probabilidad $\frac{1}{2}$ no se realiza cambios a L
 - ▶ Con probabilidad $\frac{1}{2}$ se realiza cambios a L . En este caso se escoge con distribución uniforme un par (i, j) tal que $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e $i \neq j$, y se intercambia $L[i]$ por $L[j]$

Permutaciones de una lista: distribución estacionaria

La matriz de transición P de la cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ satisface lo siguiente para cada $L_1, L_2 \in \Omega$:

$$P[L_1, L_2] = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } L_1 = L_2 \\ \frac{1}{n \cdot (n-1)} & \text{si } L_1 \text{ y } L_2 \text{ difieren exactamente en dos posiciones} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Permutaciones de una lista: distribución estacionaria

La matriz de transición P de la cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ satisface lo siguiente para cada $L_1, L_2 \in \Omega$:

$$P[L_1, L_2] = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } L_1 = L_2 \\ \frac{1}{n \cdot (n-1)} & \text{si } L_1 \text{ y } L_2 \text{ difieren exactamente en dos posiciones} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio

Sea $\vec{\pi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la distribución uniforme sobre Ω :

$$\vec{\pi}[L] = \frac{1}{n!} \quad \text{para cada } L \in \Omega$$

Demuestre que $\vec{\pi}$ es la única distribución estacionaria de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, a la cual converge la cadena independientemente del estado inicial.

Permutaciones de una lista: caminos canónicos

Dados $L_1, L_2 \in \Omega$, definimos un camino canónico γ_{L_1, L_2} desde L_1 a L_2 de la siguiente forma.

Permutaciones de una lista: caminos canónicos

Dados $L_1, L_2 \in \Omega$, definimos un camino canónico γ_{L_1, L_2} desde L_1 a L_2 de la siguiente forma.

- ▶ Suponiendo que $L_1 = [a_1, \dots, a_n]$ y $L_2 = [b_1, \dots, b_n]$, los arcos de γ_{L_1, L_2} van colocando a cada elemento b_i en la posición i que le corresponde en L_2 , desde $i = 1$ hasta $i = n$
- ▶ Si un elemento b_i estaba en la posición i en su turno, entonces no se realiza ninguna acción

Permutaciones de una lista: caminos canónicos

Dados $L_1, L_2 \in \Omega$, definimos un camino canónico γ_{L_1, L_2} desde L_1 a L_2 de la siguiente forma.

- ▶ Suponiendo que $L_1 = [a_1, \dots, a_n]$ y $L_2 = [b_1, \dots, b_n]$, los arcos de γ_{L_1, L_2} van colocando a cada elemento b_i en la posición i que le corresponde en L_2 , desde $i = 1$ hasta $i = n$
- ▶ Si un elemento b_i estaba en la posición i en su turno, entonces no se realiza ninguna acción

Tenemos que $|\gamma_{L_1, L_2}| \leq n$

Permutaciones de una lista: caminos canónicos

Dados $L_1, L_2 \in \Omega$, definimos un camino canónico γ_{L_1, L_2} desde L_1 a L_2 de la siguiente forma.

- ▶ Suponiendo que $L_1 = [a_1, \dots, a_n]$ y $L_2 = [b_1, \dots, b_n]$, los arcos de γ_{L_1, L_2} van colocando a cada elemento b_i en la posición i que le corresponde en L_2 , desde $i = 1$ hasta $i = n$
- ▶ Si un elemento b_i estaba en la posición i en su turno, entonces no se realiza ninguna acción

Tenemos que $|\gamma_{L_1, L_2}| \leq n$

Definimos Γ como $\{\gamma_{L_1, L_2} \mid L_1, L_2 \in \Omega\}$

Permutaciones de una lista: caminos canónicos

Ejemplo

Si $L_1 = [3, 1, 4, 2]$ y $L_2 = [4, 2, 1, 3]$, el camino canónico de L_1 a L_2 se construye realizando las siguientes acciones:

1. Colocar el elemento 4 en la posición 1, lo que equivale a permutar las posiciones 1 y 3 en la lista L_1 generando $L_3 = [4, 1, 3, 2]$
2. Colocar el elemento 2 en la posición 2, lo que equivale a permutar las posiciones 2 y 4 en la lista L_3 generando $L_4 = [4, 2, 3, 1]$
3. Colocar el elemento 1 en la posición 3, lo que equivale a permutar las posiciones 3 y 4 en la lista L_4 generando $L_2 = [4, 2, 1, 3]$

Tenemos entonces que $\gamma_{L_1, L_2} = \{L_1, L_3\}, \{L_3, L_4\}, \{L_4, L_2\}$

Permutaciones de una lista: caminos por arco

No hay una forma sencilla de contar la cantidad de caminos que pasan por un arco dado.

Permutaciones de una lista: caminos por arco

No hay una forma sencilla de contar la cantidad de caminos que pasan por un arco dado.

- ▶ Vamos a acotar superiormente este número

Permutaciones de una lista: caminos por arco

No hay una forma sencilla de contar la cantidad de caminos que pasan por un arco dado.

- Vamos a acotar superiormente este número

Considere un arco $\{L_1, L_2\}$ del grafo $H_{P, \vec{\pi}}$ tal que $L_1 \neq L_2$, y suponga que:

$$k = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} L_1[i] \neq L_2[i]$$

Permutaciones de una lista: caminos por arco

No hay una forma sencilla de contar la cantidad de caminos que pasan por un arco dado.

- Vamos a acotar superiormente este número

Considere un arco $\{L_1, L_2\}$ del grafo $H_{P, \vec{\pi}}$ tal que $L_1 \neq L_2$, y suponga que:

$$k = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} L_1[i] \neq L_2[i]$$

Vamos a definir una función inyectiva $f_{\{L_1, L_2\}} : \{\gamma_{L_3, L_4} \mid \{L_1, L_2\} \in \gamma_{L_3, L_4}\} \rightarrow \Omega$

Permutaciones de una lista: caminos por arco

No hay una forma sencilla de contar la cantidad de caminos que pasan por un arco dado.

- Vamos a acotar superiormente este número

Considere un arco $\{L_1, L_2\}$ del grafo $H_{P, \vec{\pi}}$ tal que $L_1 \neq L_2$, y suponga que:

$$k = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} L_1[i] \neq L_2[i]$$

Vamos a definir una función inyectiva $f_{\{L_1, L_2\}} : \{\gamma_{L_3, L_4} \mid \{L_1, L_2\} \in \gamma_{L_3, L_4}\} \rightarrow \Omega$

- Concluimos que $|\{\gamma_{L_3, L_4} \mid \{L_1, L_2\} \in \gamma_{L_3, L_4}\}| \leq |\Omega| = n!$

Permutaciones de una lista: caminos por arco

Suponga que $L_1 = [a_1, \dots, a_n]$, y sean $L_3, L_4 \in \Omega$ tales que $\{L_1, L_2\} \in \gamma_{L_3, L_4}$

- Nótese que $L_3 \neq L_4$

Permutaciones de una lista: caminos por arco

Suponga que $L_1 = [a_1, \dots, a_n]$, y sean $L_3, L_4 \in \Omega$ tales que $\{L_1, L_2\} \in \gamma_{L_3, L_4}$

► Nótese que $L_3 \neq L_4$

Nos referimos a la posición de un elemento en las permutaciones L_3 , L_4 y L_1 como *inicial*, *final* y *actual*, respectivamente.

Permutaciones de una lista: caminos por arco

Suponga que $L_1 = [a_1, \dots, a_n]$, y sean $L_3, L_4 \in \Omega$ tales que $\{L_1, L_2\} \in \gamma_{L_3, L_4}$

► Nótese que $L_3 \neq L_4$

Nos referimos a la posición de un elemento en las permutaciones L_3 , L_4 y L_1 como *inicial*, *final* y *actual*, respectivamente.

Definimos $f_{\{L_1, L_2\}}(\gamma_{L_3, L_4})$ como una lista $L \in \Omega$ tal que:

Permutaciones de una lista: caminos por arco

Suponga que $L_1 = [a_1, \dots, a_n]$, y sean $L_3, L_4 \in \Omega$ tales que $\{L_1, L_2\} \in \gamma_{L_3, L_4}$

- Nótese que $L_3 \neq L_4$

Nos referimos a la posición de un elemento en las permutaciones L_3 , L_4 y L_1 como *inicial*, *final* y *actual*, respectivamente.

Definimos $f_{\{L_1, L_2\}}(\gamma_{L_3, L_4})$ como una lista $L \in \Omega$ tal que:

- Los elementos $a_1, \dots, a_{k-1}$ son colocados en L en sus posiciones iniciales en L_3

Permutaciones de una lista: caminos por arco

Suponga que $L_1 = [a_1, \dots, a_n]$, y sean $L_3, L_4 \in \Omega$ tales que $\{L_1, L_2\} \in \gamma_{L_3, L_4}$

- Nótese que $L_3 \neq L_4$

Nos referimos a la posición de un elemento en las permutaciones L_3 , L_4 y L_1 como *inicial*, *final* y *actual*, respectivamente.

Definimos $f_{\{L_1, L_2\}}(\gamma_{L_3, L_4})$ como una lista $L \in \Omega$ tal que:

- Los elementos $a_1, \dots, a_{k-1}$ son colocados en L en sus posiciones iniciales en L_3
- Los $n - (k - 1)$ elementos restantes de L_1 son colocados en L en el orden final en que aparecen en L_4

Permutaciones de una lista: caminos por arco

Podemos comprobar que $f_{\{L_1, L_2\}}$ es inyectiva obteniendo L_3 y L_4 a partir de $f_{\{L_1, L_2\}}(\gamma_{L_3, L_4})$

- Nótese que γ_{L_3, L_4} está determinado por L_3 y L_4

Permutaciones de una lista: caminos por arco

Podemos comprobar que $f_{\{L_1, L_2\}}$ es inyectiva obteniendo L_3 y L_4 a partir de $f_{\{L_1, L_2\}}(\gamma_{L_3, L_4})$

- Nótese que γ_{L_3, L_4} está determinado por L_3 y L_4

Podemos recuperar L_4 de la siguiente forma:

- Las posiciones finales de $a_1, \dots, a_{k-1}$ son las mismas que sus posiciones actuales
- El orden final de los elementos restantes se puede obtener directamente de $f_{\{L_1, L_2\}}(\gamma_{L_3, L_4})$

Permutaciones de una lista: caminos por arco

Podemos recuperar L_3 notando que:

- ▶ Las posiciones iniciales de $a_1, \dots, a_{k-1}$ se obtienen directamente de $f_{\{L_1, L_2\}}(\gamma_{L_3, L_4})$
- ▶ Las transiciones realizadas antes de $\{L_1, L_2\}$ en el camino γ_{L_3, L_4} corresponden a poner a un elemento de $a_1, \dots, a_{k-1}$ en su posición final

Permutaciones de una lista: caminos por arco

Podemos recuperar L_3 notando que:

- ▶ Las posiciones iniciales de $a_1, \dots, a_{k-1}$ se obtienen directamente de $f_{\{L_1, L_2\}}(\gamma_{L_3, L_4})$
- ▶ Las transiciones realizadas antes de $\{L_1, L_2\}$ en el camino γ_{L_3, L_4} corresponden a poner a un elemento de $a_1, \dots, a_{k-1}$ en su posición final
- ▶ Podemos deducir las posiciones iniciales de los $n - (k - 1)$ elementos restantes a partir de las transiciones que fueron realizadas antes de $\{L_1, L_2\}$ en el camino γ_{L_3, L_4}

Permutaciones de una lista: carga máxima

Recordemos que la carga máxima de un arco es

$$\rho(\Gamma) = \max_{e \in E_P, \vec{\pi}} \left(\frac{1}{Q(e)} \sum_{\gamma_{L_1, L_2} \in \Gamma : e \in \gamma_{L_1, L_2}} \vec{\pi}[L_1] \cdot \vec{\pi}[L_2] \cdot |\gamma_{L_1, L_2}| \right)$$

Tenemos que:

Permutaciones de una lista: carga máxima

Recordemos que la carga máxima de un arco es

$$\rho(\Gamma) = \max_{e \in E_P, \vec{\pi}} \left(\frac{1}{Q(e)} \sum_{\gamma_{L_1, L_2} \in \Gamma : e \in \gamma_{L_1, L_2}} \vec{\pi}[L_1] \cdot \vec{\pi}[L_2] \cdot |\gamma_{L_1, L_2}| \right)$$

Tenemos que:

$$\blacktriangleright \forall L \in \Omega : \vec{\pi}[L] = \frac{1}{n!}$$

Permutaciones de una lista: carga máxima

Recordemos que la carga máxima de un arco es

$$\rho(\Gamma) = \max_{e \in E_{P, \vec{\pi}}} \left(\frac{1}{Q(e)} \sum_{\gamma_{L_1, L_2} \in \Gamma : e \in \gamma_{L_1, L_2}} \vec{\pi}[L_1] \cdot \vec{\pi}[L_2] \cdot |\gamma_{L_1, L_2}| \right)$$

Tenemos que:

- ▶ $\forall L \in \Omega : \vec{\pi}[L] = \frac{1}{n!}$
- ▶ $\forall e \in E_{P, \vec{\pi}}$ tal que $e = \{L_1, L_2\} : Q(e) = P[L_1, L_2] \cdot \vec{\pi}[L_2] \geq \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \frac{1}{n!}$

Permutaciones de una lista: carga máxima

Recordemos que la carga máxima de un arco es

$$\rho(\Gamma) = \max_{e \in E_{P, \vec{\pi}}} \left(\frac{1}{Q(e)} \sum_{\gamma_{L_1, L_2} \in \Gamma : e \in \gamma_{L_1, L_2}} \vec{\pi}[L_1] \cdot \vec{\pi}[L_2] \cdot |\gamma_{L_1, L_2}| \right)$$

Tenemos que:

- ▶ $\forall L \in \Omega : \vec{\pi}[L] = \frac{1}{n!}$
- ▶ $\forall e \in E_{P, \vec{\pi}}$ tal que $e = \{L_1, L_2\} : Q(e) = P[L_1, L_2] \cdot \vec{\pi}[L_2] \geq \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \frac{1}{n!}$
- ▶ $\forall e \in E_{P, \vec{\pi}}$ tal que $e = \{L_1, L_2\}$ y $L_1 \neq L_2 : |\{\gamma_{L_3, L_4} \in \Gamma \mid e \in \gamma_{L_3, L_4}\}| \leq n!$

Permutaciones de una lista: carga máxima

Recordemos que la carga máxima de un arco es

$$\rho(\Gamma) = \max_{e \in E_{P, \vec{\pi}}} \left(\frac{1}{Q(e)} \sum_{\gamma_{L_1, L_2} \in \Gamma : e \in \gamma_{L_1, L_2}} \vec{\pi}[L_1] \cdot \vec{\pi}[L_2] \cdot |\gamma_{L_1, L_2}| \right)$$

Tenemos que:

- ▶ $\forall L \in \Omega : \vec{\pi}[L] = \frac{1}{n!}$
- ▶ $\forall e \in E_{P, \vec{\pi}}$ tal que $e = \{L_1, L_2\} : Q(e) = P[L_1, L_2] \cdot \vec{\pi}[L_2] \geq \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \frac{1}{n!}$
- ▶ $\forall e \in E_{P, \vec{\pi}}$ tal que $e = \{L_1, L_2\}$ y $L_1 \neq L_2 : |\{\gamma_{L_3, L_4} \in \Gamma \mid e \in \gamma_{L_3, L_4}\}| \leq n!$
- ▶ $\forall e \in E_{P, \vec{\pi}}$ tal que $e = \{L, L\} : |\{\gamma_{L_3, L_4} \in \Gamma \mid e \in \gamma_{L_3, L_4}\}| = 1 \leq n!$

Permutaciones de una lista: carga máxima

Recordemos que la carga máxima de un arco es

$$\rho(\Gamma) = \max_{e \in E_{P, \vec{\pi}}} \left(\frac{1}{Q(e)} \sum_{\gamma_{L_1, L_2} \in \Gamma : e \in \gamma_{L_1, L_2}} \vec{\pi}[L_1] \cdot \vec{\pi}[L_2] \cdot |\gamma_{L_1, L_2}| \right)$$

Tenemos que:

- ▶ $\forall L \in \Omega : \vec{\pi}[L] = \frac{1}{n!}$
- ▶ $\forall e \in E_{P, \vec{\pi}}$ tal que $e = \{L_1, L_2\} : Q(e) = P[L_1, L_2] \cdot \vec{\pi}[L_2] \geq \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \frac{1}{n!}$
- ▶ $\forall e \in E_{P, \vec{\pi}}$ tal que $e = \{L_1, L_2\}$ y $L_1 \neq L_2 : |\{\gamma_{L_3, L_4} \in \Gamma \mid e \in \gamma_{L_3, L_4}\}| \leq n!$
- ▶ $\forall e \in E_{P, \vec{\pi}}$ tal que $e = \{L, L\} : |\{\gamma_{L_3, L_4} \in \Gamma \mid e \in \gamma_{L_3, L_4}\}| = 1 \leq n!$
- ▶ $\forall L_1, L_2 \in \Omega : |\gamma_{L_1, L_2}| \leq n$

Permutaciones de una lista: carga máxima

Desarrollando la expresión obtenemos:

$$\begin{aligned}\rho(\Gamma) &= \max_{e \in E_P, \vec{\pi}} \left(\frac{1}{Q(e)} \sum_{\gamma_{L_1, L_2} \in \Gamma : e \in \gamma_{L_1, L_2}} \vec{\pi}[L_1] \cdot \vec{\pi}[L_2] \cdot |\gamma_{L_1, L_2}| \right) \\ &\leq \max_{e \in E_P, \vec{\pi}} \left(n \cdot (n-1) \cdot n! \sum_{\gamma_{L_1, L_2} \in \Gamma : e \in \gamma_{L_1, L_2}} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n!} \cdot n \right) \\ &\leq \max_{e \in E_P, \vec{\pi}} \left(n \cdot (n-1) \cdot n! \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n!} \cdot n \cdot n! \right) \\ &= \max_{e \in E_P, \vec{\pi}} n^2 \cdot (n-1) \\ &= n^2 \cdot (n-1)\end{aligned}$$

Permutaciones de una lista: mixing time

Recordemos que para $x \in \Omega$ y $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$\tau_x(\varepsilon) \leq \rho(\Gamma) \cdot \left(\ln \frac{1}{\vec{\pi}[x]} + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

Permutaciones de una lista: mixing time

Recordemos que para $x \in \Omega$ y $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$\tau_x(\varepsilon) \leq \rho(\Gamma) \cdot \left(\ln \frac{1}{\vec{\pi}[x]} + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \tau_x(\varepsilon) &\leq n^2 \cdot (n-1) \cdot \left(\ln \frac{1}{\vec{\pi}[x]} + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) = \\ &n^2 \cdot (n-1) \cdot \left(\ln n! + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \leq n^2 \cdot (n-1) \cdot \left(n \cdot \ln n + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

Permutaciones de una lista: mixing time

Recordemos que para $x \in \Omega$ y $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$\tau_x(\varepsilon) \leq \rho(\Gamma) \cdot \left(\ln \frac{1}{\vec{\pi}[x]} + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \tau_x(\varepsilon) &\leq n^2 \cdot (n-1) \cdot \left(\ln \frac{1}{\vec{\pi}[x]} + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) = \\ &n^2 \cdot (n-1) \cdot \left(\ln n! + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \leq n^2 \cdot (n-1) \cdot \left(n \cdot \ln n + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

Concluimos que la cadena converge rápido desde cualquier estado inicial.

Un FPAUG para las permutaciones de una lista

Ejercicio

Utilizando el resultado anterior construya un FPAUG para el problema de generar permutaciones aleatorias de una lista con n elementos y sin repeticiones.

- Su algoritmo debe realizar a lo más la siguiente cantidad de pasos en la cadena de Markov usada:

$$\left\lceil n^2 \cdot (n - 1) \cdot \left(n \cdot \ln n + \ln \frac{2}{\varepsilon} \right) \right\rceil$$