Conjuntos independientes de un grafo

Dado un grafo $G = (N, A)$, decimos que $S \subseteq N$ es un conjunto independiente si para cada $a, b \in S$ se tiene que $(a, b) \notin A$

- Vale decir, los nodos mencionados en S no están conectados entre sí en el grafo

Sea GIS $= \{(G, k) \mid G$ tiene un conjunto independiente S con $|S| \geq k\}$

Ejercicio

Demuestre que GIS es NP-completo

Contando el número de conjuntos independientes

Sea #GIS una función que, dado un grafo G y un número natural k, retorna el número de conjuntos independientes S de G tales que $|S| \geq k$

Proposición

#GIS es #P-completo bajo reducciones parsimoniosas.

Una función de conteo más simple

Sea #LIS una función que, dado un grafo G y un número natural k, retorna el número de conjuntos independientes S de G tales que $|S| \leq k$

Proposición

#LIS es #P-completo.

Ejercicio

Muestre que $L_{\#\text{LIS}} \in \text{PTIME}$

- Es posible entonces que #LIS tenga un FPRAS

#LIS es #P-completo: demostración

Dado un grafo G con n nodos, y un número natural $k \geq 1$, se tiene que:

$$\#\text{GIS}(G, k) \quad = \quad \#\text{LIS}(G, n) - \#\text{LIS}(G, k-1)$$

Concluimos entonces que $\#\text{GIS} \in \text{FP}^{\#\text{LIS}}$, vale decir, $\#\text{GIS} \leq_T^p \#\text{LIS}$

- Tenemos que #LIS es #P-hard
- Dado que $\#\text{LIS} \in \#\text{P}$, tenemos entonces que #LIS es #P-completo

□

¿Existe un FPRAS para #LIS?

Vamos a dar una respuesta negativa a esta pregunta basada en una suposición de complejidad.

- Este resultado nos va a ayudar a identificar otros problemas que no admiten FPRAS

Teorema

Si existe un FPRAS para #LIS, entonces NP = RP

#LIS no admite un FPRAS: demostración

Vamos a demostrar que si existe un FPRAS para #LIS, entonces GIS $\in$ BPP

- Dado que GIS es NP-completo, se concluye que NP $\subseteq$ BPP

Para terminar la demostración necesitamos el siguiente resultado:

Teorema

Si NP $\subseteq$ BPP, entonces NP $=$ RP

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Técnica de demostración: construyendo un grafo aumentado

Sea $G = (N, A)$ un grafo con $|N| = n$, y sea $k \geq 1$ un número natural.

- (G, k) es una entrada de GIS

Consideramos un número natural r, cuyo valor definiremos más tarde, y para cada $v \in N$ definimos un nuevo conjunto de r nodos:

$$C_v \quad = \quad \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$$

Técnica de demostración: construyendo un grafo aumentado

Usamos r para definir un nuevo grafo $G^r = (N^r, A^r)$:

$$
\begin{aligned}
N^r &= \bigcup_{v \in N} C_v \\
A^r &= \bigcup_{(u,v) \in A} \{(a, b) \mid a \in C_u \text{ y } b \in C_v\}
\end{aligned}
$$

G^r es un grafo con $r \cdot n$ nodos, donde dos nodos son adyacentes si y sólo si sus nodos de origen en G son adyacentes.

La noción de testigo

Definición

Dados conjuntos independientes S de G y T de G^r, decimos que T es un testigo para S si:

$$S \quad = \quad \{v \in N \mid C_v \cap T \neq \emptyset\}$$

Un conjunto independiente de G^r es testigo de un único conjunto independiente de G

- Un conjunto independiente de G puede tener muchos testigos en G^r

Dado un conjunto independiente T de G^r, denotamos como S_T al único independiente de G que tiene como testigo a T

El número de testigos

Definimos los conjuntos:

$$\begin{aligned} I^r(G,k) &= \{T \mid T \text{ es un conjunto independiente de } G^r \text{ tal que } |S_T| = k\} \\ M^r(G,k) &= \{T \mid T \text{ es un conjunto independiente de } G^r \text{ tal que } |S_T| < k\} \end{aligned}$$

La conexión fundamental:

$$(G,k) \in \text{GIS si y sólo si } I^r(G,k) \neq \emptyset$$

Suponiendo que existe un FPRAS para #LIS, vamos a desarrollar un algoritmo aleatorizado de tiempo polinomial para verificar si $I^r(G,k) \neq \emptyset$

- Obtenemos un algoritmo aleatorizado de tiempo polinomial para GIS

El número de testigos

Para $\ell \in \{0, 1, \ldots, k\}$ definimos t_ℓ como la cantidad de testigos en G^r para un conjunto independiente de G con ℓ nodos.

Por la definición de G^r tenemos que $t_\ell = (2^r - 1)^\ell$

- ¿Por qué?

Además, G tiene a lo más $\binom{n}{\ell}$ conjuntos independientes con ℓ nodos

El número de testigos

A partir de lo anterior concluimos que:

$$
\begin{aligned}
|M^r(G,k)| &\leq \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{n}{\ell} t_\ell \\
&\leq \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{n}{\ell} t_{k-1} \\
&\leq t_{k-1} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \\
&= 2^n \cdot t_{k-1} \\
&= 2^n \cdot (2^r - 1)^{k-1}
\end{aligned}
$$

Técnica de demostración: aumentando las diferencias

Por otra parte, si $(G, k) \in \text{GIS}$ tenemos que:

$$|I^r(G, k)| \geq t_k = (2^r - 1)^k$$

Concluimos que:

- Si $(G, k) \notin \text{GIS}$: $\#\text{LIS}(G^r, k \cdot r) = |M^r(G, k)| \leq 2^n(2^r - 1)^{k-1}$
- Si $(G, k) \in \text{GIS}$: $\#\text{LIS}(G^r, k \cdot r) \geq |I^r(G, k)| \geq (2^r - 1)^k$

En particular, eligiendo $r = n + 3$:

- Si $(G, k) \notin \text{GIS}$: $\#\text{LIS}(G^{n+3}, k \cdot (n + 3)) \leq 2^n(2^{n+3} - 1)^{k-1}$
- Si $(G, k) \in \text{GIS}$: $\#\text{LIS}(G^{n+3}, k \cdot (n + 3)) \geq (2^{n+3} - 1)^k$

Un algoritmo aleatorizado para GIS

Suponemos que existe un FPRAS $\mathcal{A}$ para #LIS, y mostramos como esto puede ser utilizado para obtener que GIS $\in$ BPP

Definimos el siguiente algoritmo aleatorizado $\mathcal{B}$ para GIS:

1. Dada la entrada (G, k), donde G es un grafo con n nodos, si $k = 0$ retorne **sí**, en otro caso vaya al paso 2
2. Genere el grafo G^{n+3}
3. Sea s el resultado de ejecutar $\mathcal{A}(G^{n+3}, k \cdot (n+3), \frac{1}{2})$
4. Si $s > (1 + \frac{1}{2}) \cdot 2^n (2^{n+3} - 1)^{k-1}$, entonces retorne **sí**, en caso contrario retorne **no**

Nótese que $\mathcal{B}$ funciona en tiempo polinomial en el tamaño de la entrada (G, k)

- Dado que el tamaño de G^{n+3} es polinomial en el tamaño de G (G^{n+3} tiene $n \cdot (n+3)$ nodos), $\mathcal{A}$ es un FPRAS y $\varepsilon = \frac{1}{2}$ cuando se ejecuta $\mathcal{A}$

La probabilidad de error del algoritmo

Si $(G, k) \notin$ GIS obtenemos que $\mathbf{Pr}(\mathcal{B}(G, k)$ retorne **sí**$)$ es igual a:

$$\mathbf{Pr}(\mathcal{A}(G^{n+3}, k \cdot (n+3), \frac{1}{2}) > (1 + \frac{1}{2}) \cdot 2^n (2^{n+3} - 1)^{k-1})$$

$$\leq \mathbf{Pr}(\mathcal{A}(G^{n+3}, k \cdot (n+3), \frac{1}{2}) > (1 + \frac{1}{2}) \cdot \#\mathrm{LIS}(G^{n+3}, k \cdot (n+3)))$$

$$\leq \mathbf{Pr}(\mathcal{A}(G^{n+3}, k \cdot (n+3), \frac{1}{2}) > (1 + \frac{1}{2}) \cdot \#\mathrm{LIS}(G^{n+3}, k \cdot (n+3)) \vee$$
$$\mathcal{A}(G^{n+3}, k \cdot (n+3), \frac{1}{2}) < (1 - \frac{1}{2}) \cdot \#\mathrm{LIS}(G^{n+3}, k \cdot (n+3)))$$

$$= 1 - \mathbf{Pr}(\mathcal{A}(G^{n+3}, k \cdot (n+3), \frac{1}{2}) \leq (1 + \frac{1}{2}) \cdot \#\mathrm{LIS}(G^{n+3}, k \cdot (n+3)) \wedge$$
$$\mathcal{A}(G^{n+3}, k \cdot (n+3), \frac{1}{2}) \geq (1 - \frac{1}{2}) \cdot \#\mathrm{LIS}(G^{n+3}, k \cdot (n+3)))$$

$$= 1 - \mathbf{Pr}(|\mathcal{A}(G^{n+3}, k \cdot (n+3), \frac{1}{2}) - \#\mathrm{LIS}(G^{n+3}, k \cdot (n+3))| \leq$$
$$\frac{1}{2} \cdot \#\mathrm{LIS}(G^{n+3}, k \cdot (n+3)))$$

$$\leq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

La probabilidad de error del algoritmo

Consideramos ahora el caso en que $(G, k) \in \mathsf{GIS}$

Primero debemos demostrar que:

$$(1 - \frac{1}{2}) \cdot \#\mathsf{LIS}(G^{n+3}, k \cdot (n+3)) \quad > \quad (1 + \frac{1}{2}) \cdot 2^n (2^{n+3} - 1)^{k-1}$$

Dado que $\#\mathsf{LIS}(G^{n+3}, k \cdot (n+3)) \geq (2^{n+3} - 1)^k$, basta demostrar que:

$$(1 - \frac{1}{2}) \cdot (2^{n+3} - 1)^k \quad > \quad (1 + \frac{1}{2}) \cdot 2^n (2^{n+3} - 1)^{k-1}$$

La probabilidad de error del algoritmo

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
& (1-\frac{1}{2})\cdot(2^{n+3}-1)^k \;>\; (1+\frac{1}{2})\cdot 2^n(2^{n+3}-1)^{k-1} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2}\cdot(2^{n+3}-1)^k \;>\; \frac{3}{2}\cdot 2^n(2^{n+3}-1)^{k-1} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2}\cdot(2^{n+3}-1) \;>\; \frac{3}{2}\cdot 2^n \\
\Leftrightarrow\quad & 2^{n+3}-1 \;>\; 3\cdot 2^n \\
\Leftrightarrow\quad & 2^n(2^3-3)-1 \;>\; 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 5\cdot 2^n-1 \;>\; 0
\end{aligned}
$$

Esta última condición es cierta para todo $n \geq 0$, de lo cual concluimos que $(1-\frac{1}{2})\cdot \#\mathsf{LIS}(G^{n+3}, k\cdot(n+3)) > (1+\frac{1}{2})\cdot 2^n(2^{n+3}-1)^{k-1}$

La probabilidad de error del algoritmo

Si $(G, k) \in \text{GIS}$ obtenemos que $\mathbf{Pr}(\mathcal{B}(G, k)$ retorne **no**$)$ es igual a:

$$\mathbf{Pr}(\mathcal{A}(G^{n+3}, k \cdot (n+3), \frac{1}{2}) \leq (1 + \frac{1}{2}) \cdot 2^n (2^{n+3} - 1)^{k-1})$$

$$\leq \mathbf{Pr}(\mathcal{A}(G^{n+3}, k \cdot (n+3), \frac{1}{2}) < (1 - \frac{1}{2}) \cdot \#\text{LIS}(G^{n+3}, k \cdot (n+3)))$$

$$\leq \mathbf{Pr}(\mathcal{A}(G^{n+3}, k \cdot (n+3), \frac{1}{2}) < (1 - \frac{1}{2}) \cdot \#\text{LIS}(G^{n+3}, k \cdot (n+3)) \vee$$
$$\mathcal{A}(G^{n+3}, k \cdot (n+3), \frac{1}{2}) > (1 + \frac{1}{2}) \cdot \#\text{LIS}(G^{n+3}, k \cdot (n+3)))$$

$$= 1 - \mathbf{Pr}(\mathcal{A}(G^{n+3}, k \cdot (n+3), \frac{1}{2}) \geq (1 - \frac{1}{2}) \cdot \#\text{LIS}(G^{n+3}, k \cdot (n+3)) \wedge$$
$$\mathcal{A}(G^{n+3}, k \cdot (n+3), \frac{1}{2}) \leq (1 + \frac{1}{2}) \cdot \#\text{LIS}(G^{n+3}, k \cdot (n+3)))$$

$$= 1 - \mathbf{Pr}(|\mathcal{A}(G^{n+3}, k \cdot (n+3), \frac{1}{2}) - \#\text{LIS}(G^{n+3}, k \cdot (n+3))| \leq$$
$$\frac{1}{2} \cdot \#\text{LIS}(G^{n+3}, k \cdot (n+3)))$$

$$\leq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

#LIS no admite un FPRAS: conclusión

Tenemos que en ambos casos el error del algoritmo $\mathcal{B}$ está acotado superiormente por $\frac{1}{4}$

Concluimos entonces que GIS $\in$ BPP

- Por lo tanto NP $\subseteq$ BPP

□

Utilizando la técnica anterior en otros problemas

Sea #IS una función que, dado un grafo G, retorna el número de conjuntos independientes de G

Teorema

Si existe un FPRAS para #IS, entonces NP = RP

Ejercicio

Demuestre el teorema utilizando la técnica usada para el caso de #LIS

Una solución del ejercicio

Al igual que para el caso de #LIS, demostramos que si existe un FPRAS para #IS, entonces GIS $\in$ BPP

- Dado que GIS es NP-completo, se concluye que NP $\subseteq$ BPP
- Concluimos entonces que NP = RP, dado que NP $\subseteq$ BPP implica que NP = RP

Dada una entrada (G, k) de GIS, definimos G^r, $I^r(G, k)$ y $M^r(G, k)$ como para el caso de #LIS

Tenemos entonces que:

- Si $(G, k) \notin$ GIS: $\#\mathrm{IS}(G^r) = |M^r(G, k)| \leq 2^n(2^r - 1)^{k-1}$
- Si $(G, k) \in$ GIS: $\#\mathrm{IS}(G^r) \geq |I^r(G, k)| \geq (2^r - 1)^k$

Una solución del ejercicio

Concluimos entonces que para $r = n + 3$:

- Si $(G, k) \notin \text{GIS}$: $\#\text{IS}(G^{n+3}) \leq 2^n(2^{n+3} - 1)^{k-1}$
- Si $(G, k) \in \text{GIS}$: $\#\text{IS}(G^{n+3}) \geq (2^{n+3} - 1)^k$

Al igual que para el caso de #LIS, suponemos que existe un FPRAS para #IS, y mostramos como esto puede ser utilizado para obtener que GIS $\in$ BPP

- El algoritmo aleatorizado de tiempo polinomial para GIS es definido de la misma forma que para el caso de #LIS
- Las cotas mencionadas arriba son utilizadas para demostrar que el error de este algoritmo está acotado superiormente por $\frac{1}{4}$ □

¿Cuál es la idea central en la técnica mostrada?

Sea (G, k) una entrada de GIS con $k \geq 1$

- Sabemos que $(G, k) \in \text{GIS}$ si y sólo si $|I^1(G, k)| \geq 1$

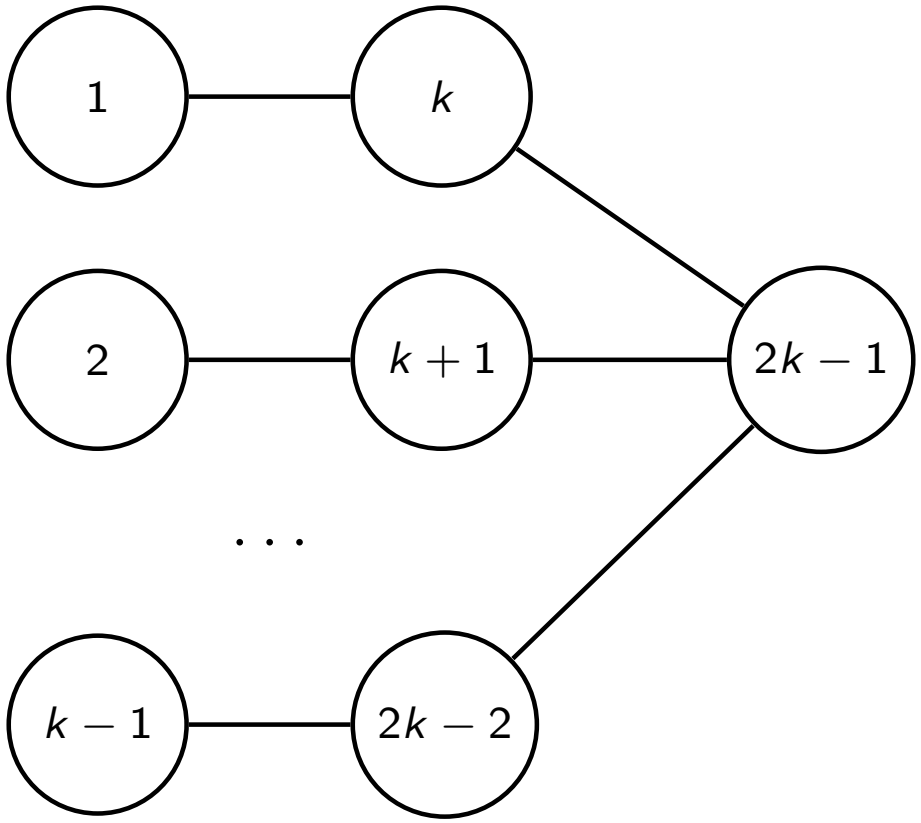
Dado que $|I^1(G, k)| = \#\text{LIS}(G, k) - \#\text{LIS}(G, k-1)$, podemos intentar utilizar un FPRAS para #LIS para determinar si $(G, k) \in \text{GIS}$

- Generamos así un algoritmo aleatorizado de tiempo polinomial para GIS

El éxito de este enfoque depende de qué tan grande sea el valor de $\#\text{LIS}(G, k) - \#\text{LIS}(G, k-1)$

¿Qué tan grande es $\#\mathsf{LIS}(H, k) - \#\mathsf{LIS}(H, k-1)$?

Considere el siguiente grafo H:



En este caso tenemos que $|I^1(H, k)| = \#\mathsf{LIS}(H, k) - \#\mathsf{LIS}(H, k-1) = 1$

- Además, $\#\mathsf{LIS}(H, k-1) \geq 3^{k-1}$

Amplificando la diferencia

La diferencia entre $\#\mathsf{LIS}(G, k)$ y $\#\mathsf{LIS}(G, k-1)$ puede ser pequeña.

- La utilización de un FPRAS para #LIS no nos garantiza la existencia de un algoritmo aleatorizado de tiempo polinomial para GIS
  - No podemos acotar superiormente el error de algoritmo

Para solucionar este problema *amplificamos* $\#\mathsf{LIS}(G, k) - \#\mathsf{LIS}(G, k-1)$

Amplificando la diferencia

De manera más precisa, de la definición de G^r tenemos:

$\#\text{LIS}(G, k) - \#\text{LIS}(G, k-1) > 0$ si y sólo si

$$\#\text{LIS}(G^r, k \cdot r) - \#\text{LIS}(G^r, (k-1) \cdot r) > 0$$

Así, usamos la diferencia más grande $\#\text{LIS}(G^r, k \cdot r) - \#\text{LIS}(G^r, (k-1) \cdot r)$ para verificar si $\#\text{LIS}(G, k) - \#\text{LIS}(G, k-1) > 0$

¿Cuánto amplificando la diferencia?

Suponiendo que G tiene n nodos y tomando $r = n + 3$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \#\mathsf{LIS}(G^r, k \cdot r) - \#\mathsf{LIS}(G^r, (k-1) \cdot r) &\geq (2^r - 1)^k - 2^n \cdot (2^r - 1)^{k-1} \\ &= (2^{n+3} - (2^n + 1)) \cdot (2^{n+3} - 1)^{k-1} \\ &\geq (2^{n+3} - 2^{n+1}) \cdot (2^{n+3} - 1)^{k-1} \\ &= 3 \cdot 2^{n+1} \cdot (2^{n+3} - 1)^{k-1} \end{aligned}$$

¡Podemos entonces verificar si $\#\mathsf{LIS}(G, k) - \#\mathsf{LIS}(G, k-1) > 0$ considerando una brecha de tamaño exponencial en n!