

Irreducibilidad, aperiodicidad y el caso infinito

Irreducibilidad y aperiodicidad **no** son condiciones suficientes para asegurar que una cadena de Markov con un conjunto infinito (enumerable) de estados tiene una distribución estacionaria única.

- ▶ De hecho, bajo estas condiciones ni siquiera se puede asegurar que la cadena tiene una distribución estacionaria

Irreducibilidad, aperiodicidad y el caso infinito

Irreducibilidad y aperiodicidad **no** son condiciones suficientes para asegurar que una cadena de Markov con un conjunto infinito (enumerable) de estados tiene una distribución estacionaria única.

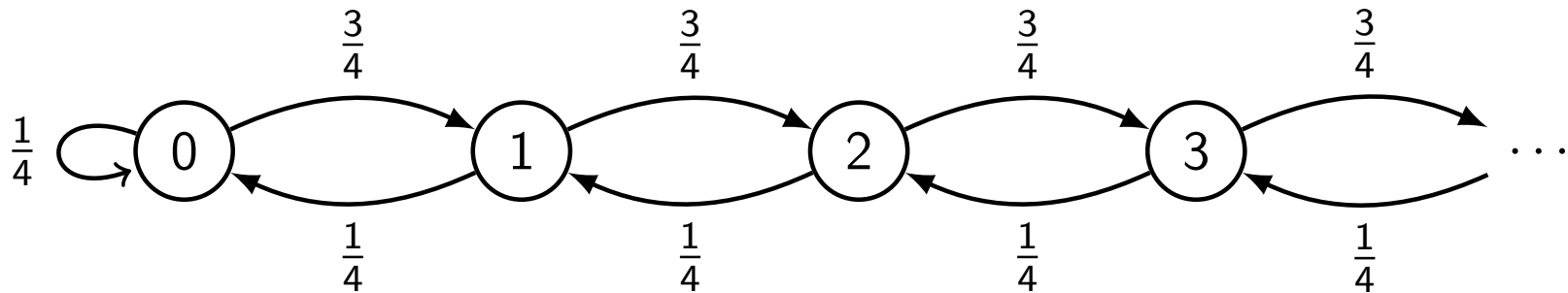
- ▶ De hecho, bajo estas condiciones ni siquiera se puede asegurar que la cadena tiene una distribución estacionaria

Ejercicio

Construya una cadena de Markov irreducible, aperiódica, con un conjunto infinito de estados y que no tenga distribución estacionaria.

Una solución al ejercicio

Considere la siguiente cadena de Markov con conjunto de estado $\Omega = \mathbb{N}$:



Esta cadena de Markov es irreducible y aperiódica.

- Es fácil ver que el estado 0 es aperiódico, de lo cual se concluye que la cadena de Markov es aperiódica dado que es irreducible

Una solución al ejercicio

Suponga que P es la matriz de transición de la cadena de Markov, y $\vec{\lambda}$ es una distribución estacionaria para ella, vale decir,

$$P\vec{\lambda} = \vec{\lambda}$$

Además, suponga que $\vec{\lambda}[i] = \lambda_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$

- Tenemos que $\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i = 1$

Una solución al ejercicio

Considerando las definiciones de P y $\vec{\lambda}$ obtenemos:

$$\lambda_0 = \frac{1}{4} \cdot \lambda_0 + \frac{1}{4} \cdot \lambda_1$$

Por lo tanto: $3 \cdot \lambda_0 = \lambda_1$

Una solución al ejercicio

Considere $i > 0$ y suponga que $3 \cdot \lambda_{i-1} = \lambda_i$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \frac{3}{4} \cdot \lambda_{i-1} + \frac{1}{4} \cdot \lambda_{i+1} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \lambda_i + \frac{1}{4} \cdot \lambda_{i+1} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \lambda_i + \frac{1}{4} \cdot \lambda_{i+1}\end{aligned}$$

Por lo tanto: $3 \cdot \lambda_i = \lambda_{i+1}$

Una solución al ejercicio

Concluimos que $\lambda_i = 3^i \cdot \lambda_0$ para cada $i \in \mathbb{N}$

Una solución al ejercicio

Concluimos que $\lambda_i = 3^i \cdot \lambda_0$ para cada $i \in \mathbb{N}$

Así, dado que $\lambda_i \leq 1$ para cada $i \in \mathbb{N}$, se debe tener que $\lambda_0 = 0$

Una solución al ejercicio

Concluimos que $\lambda_i = 3^i \cdot \lambda_0$ para cada $i \in \mathbb{N}$

Así, dado que $\lambda_i \leq 1$ para cada $i \in \mathbb{N}$, se debe tener que $\lambda_0 = 0$

Concluimos entonces que $\lambda_i = 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$, lo cual contradice la condición $\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i = 1$

- ▶ No podemos entonces tener una distribución estacionaria para P $\square$

¿Cómo podemos asegurar convergencia en el caso infinito?

Vamos a ver que irreducibilidad y aperiodicidad sí son condiciones útiles en el caso infinito, pero cuando con consideradas junto con una tercera propiedad fundamental.

La noción de estado recurrente

Sea b un estado en una cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$

La noción de estado recurrente

Sea b un estado en una cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$

Definimos T_b como una variable aleatoria que registra el primer instante de tiempo mayor a 0 en que llegamos a b , suponiendo que en el tiempo 0 estábamos en b

- ▶ Vale decir, si el valor de T_b es n , con $n \geq 1$, entonces $X_0 = b$, $X_1 \neq b$, ..., $X_{n-1} \neq b$ y $X_n = b$

Este tiempo de retorno a b es llamado *hitting time*

La noción de estado recurrente

Sea b un estado en una cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$

Definimos T_b como una variable aleatoria que registra el primer instante de tiempo mayor a 0 en que llegamos a b , suponiendo que en el tiempo 0 estábamos en b

- ▶ Vale decir, si el valor de T_b es n , con $n \geq 1$, entonces $X_0 = b$, $X_1 \neq b$, ..., $X_{n-1} \neq b$ y $X_n = b$

Este tiempo de retorno a b es llamado *hitting time*

Definición

b es recurrente si $\sum_{n \geq 1} \Pr(T_b = n) = 1$, y b es transitorio en caso contrario.

Una caracterización de los estado recurrentes

Sea b un estado en una cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$

Defina:

$$p_b = \sum_{n \geq 1} \mathbf{Pr}(T_b = n)$$

Una caracterización de los estado recurrentes

Sea b un estado en una cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$

Defina:

$$p_b = \sum_{n \geq 1} \mathbf{Pr}(T_b = n)$$

Ejercicio

Demuestre que $p_b \in [0, 1]$

- ▶ Nótese que no estamos asumiendo que b es recurrente
- ▶ ¿Es posible tener una cadena de Markov donde $p_b = 0$?

Una caracterización de los estado recurrentes

Suponga que la matriz de transición de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ es P , y recuerde que G_P es grafo que representa a P

Partiendo desde el estado b , consideramos caminatas sobre G_P que sólo utilizan arcos con probabilidad mayor a cero y tiene largo infinito.

- ▶ Podemos realizar estas caminatas incluso si $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ tiene un conjunto finito de estados

Defina una variable aleatoria V_b que cuenta el número total de veces que b es visitado en las caminatas.

- ▶ El punto de partida b es considerado como la primera visita a este estado

Una caracterización de los estado recurrentes

Dado un número natural $n \geq 1$, tenemos que:

$$\Pr(V_b = n) = p_b^{n-1} \cdot (1 - p_b)$$

Una caracterización de los estado recurrentes

Dado un número natural $n \geq 1$, tenemos que:

$$\Pr(V_b = n) = p_b^{n-1} \cdot (1 - p_b)$$

Proposición

b es recurrente si y sólo si $\mathbf{E}[V_b] = \infty$

Una caracterización de los estado recurrentes

Dado un número natural $n \geq 1$, tenemos que:

$$\Pr(V_b = n) = p_b^{n-1} \cdot (1 - p_b)$$

Proposición

b es recurrente si y sólo si $\mathbf{E}[V_b] = \infty$

Ejercicio

Demuestre la proposición.

Una caracterización de los estado recurrentes

Dado un número natural $n \geq 1$, tenemos que:

$$\Pr(V_b = n) = p_b^{n-1} \cdot (1 - p_b)$$

Proposición

b es recurrente si y sólo si $\mathbf{E}[V_b] = \infty$

Ejercicio

Demuestre la proposición.

¡Tenemos entonces que b es recurrente si y sólo si b es visitado una cantidad infinita de veces!

Una segunda caracterización de los estado recurrentes

Partiendo desde el estado b , nuevamente consideramos caminatas sobre G_P que sólo utilizan arcos con probabilidad mayor a cero y tiene largo infinito.

Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $V_b^{(n)}$ una variable aleatoria tal que $V_b^{(n)} = 1$ si el estado en la caminata es b después de recorrer n arcos en G_P , y $V_b^{(n)} = 0$ en caso contrario.

Tenemos que:

$$V_b = \sum_{n \in \mathbb{N}} V_b^{(n)}$$

Una segunda caracterización de los estado recurrentes

Concluimos que:

$$\mathbf{E}[V_b] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[V_b^{(n)}]$$

Una segunda caracterización de los estado recurrentes

Concluimos que:

$$\mathbf{E}[V_b] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[V_b^{(n)}]$$

Así, dado que $V_b^{(n)} \sim \mathbf{Ber}(\mathbf{Pr}(X_n = b \mid X_0 = b))$, concluimos que:

$$\mathbf{E}[V_b] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{Pr}(X_n = b \mid X_0 = b)$$

Una segunda caracterización de los estado recurrentes

Concluimos que:

$$\mathbf{E}[V_b] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[V_b^{(n)}]$$

Así, dado que $V_b^{(n)} \sim \mathbf{Ber}(\mathbf{Pr}(X_n = b \mid X_0 = b))$, concluimos que:

$$\mathbf{E}[V_b] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{Pr}(X_n = b \mid X_0 = b)$$

Corolario

b es recurrente si y sólo si

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{Pr}(X_n = b \mid X_0 = b) = \infty$$

Una tercera propiedad fundamental: estados recurrentes positivos

Definition

Un estado b en una cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ es recurrente positivo si b es recurrente y $\mathbf{E}[T_b] \in \mathbb{R}$

Una tercera propiedad fundamental: estados recurrentes positivos

Definition

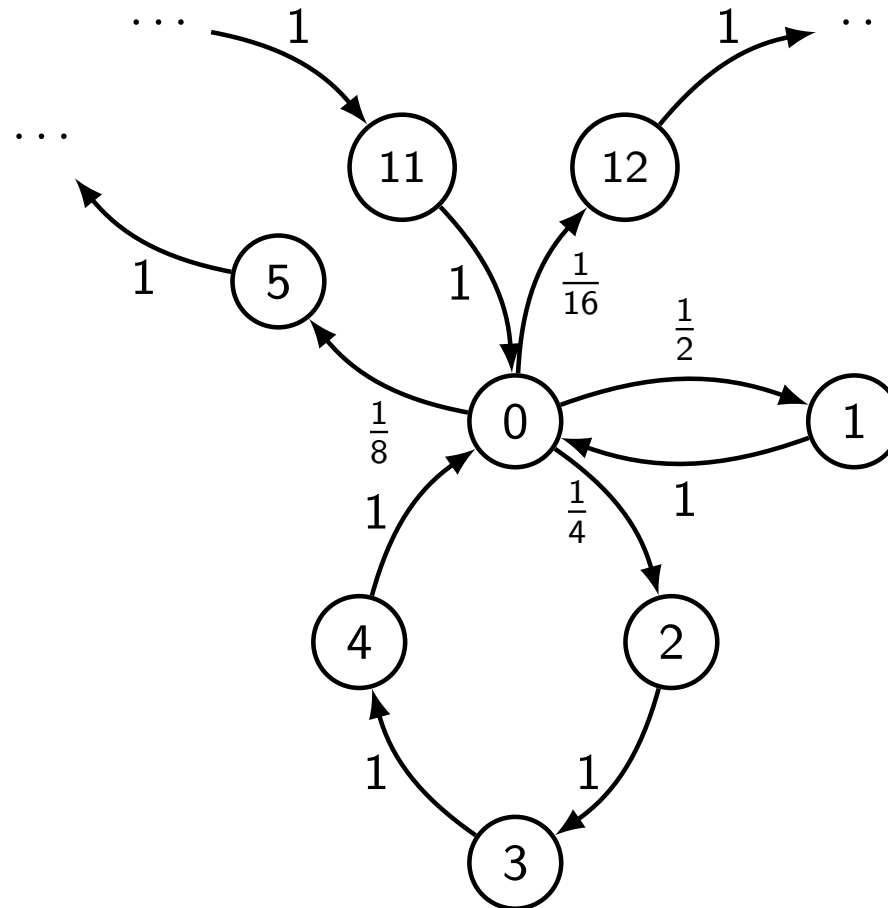
Un estado b en una cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ es recurrente positivo si b es recurrente y $\mathbf{E}[T_b] \in \mathbb{R}$

Ejercicio

De una cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ con conjunto de estados Ω y un estado $b \in \Omega$ tal que b es recurrente pero no recurrente positivo.

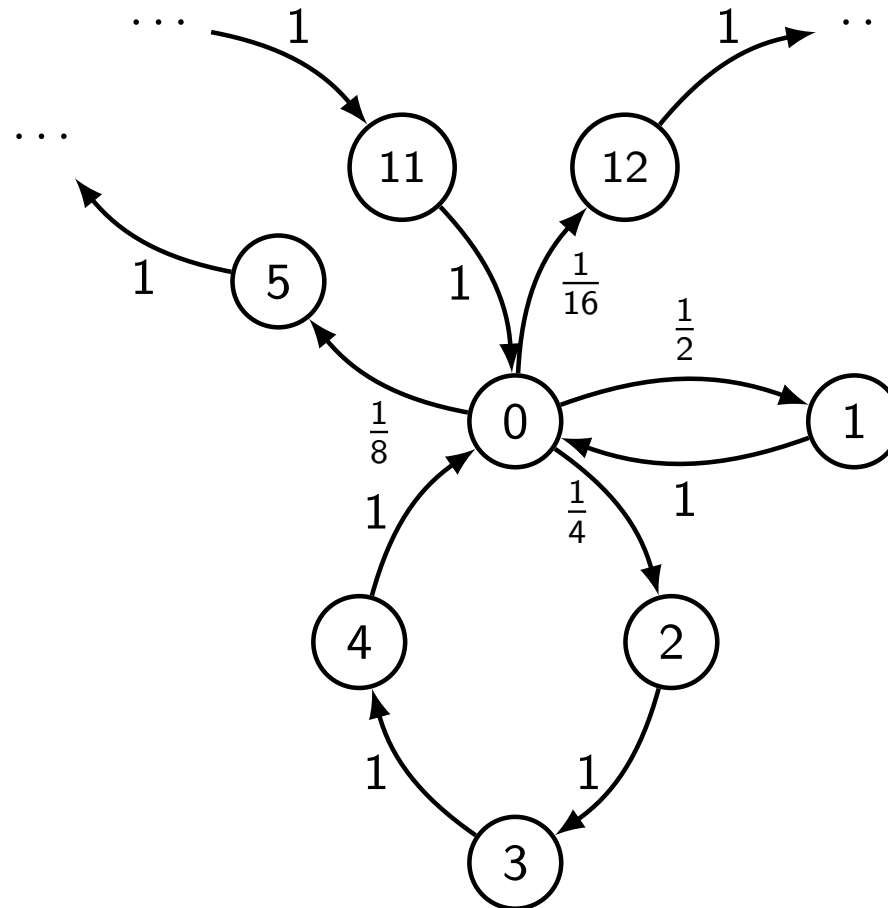
Una solución para el ejercicio

Considere la siguiente cadena de Markov con conjunto de estados $\Omega = \mathbb{N}$:



Una solución para el ejercicio

Considere la siguiente cadena de Markov con conjunto de estados $\Omega = \mathbb{N}$:



Tenemos que 0 es un estado recurrente pero no recurrente positivo.

Existencia y unicidad de la distribución estacionaria: el caso general

Sea $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov irreducible, aperiódica y **donde cada estado es recurrente positivo**

- ▶ Y sea $\vec{\pi} \in [0, 1]^{|\Omega|}$ un vector tal que $\vec{\pi}[a] = \lambda_a$ para cada $a \in \Omega$, donde Ω es el conjunto de estados de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$
 - ▶ Nótese que Ω puede ser un conjunto infinito enumerable
 - ▶ $\lambda_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Pr}(X_n = a \mid X_0 = b)$, vale decir, λ_a es definido como en el caso finito considerando un estado arbitrario $b \in \Omega$ (todos los puntos de partida dan el mismo resultado)

Existencia y unicidad de la distribución estacionaria: el caso general

Sea $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov irreducible, aperiódica y **donde cada estado es recurrente positivo**

- ▶ Y sea $\vec{\pi} \in [0, 1]^{|\Omega|}$ un vector tal que $\vec{\pi}[a] = \lambda_a$ para cada $a \in \Omega$, donde Ω es el conjunto de estados de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$
 - ▶ Nótese que Ω puede ser un conjunto infinito enumerable
 - ▶ $\lambda_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(X_n = a \mid X_0 = b)$, vale decir, λ_a es definido como en el caso finito considerando un estado arbitrario $b \in \Omega$ (todos los puntos de partida dan el mismo resultado)

Teorema

$\vec{\pi}$ es la única distribución estacionaria para $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$