



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
 ESCUELA DE INGENIERIA
 DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Tópicos Avanzados en Teoría de la Computación - IIC3810
Lista de Ejercicios 6

1. Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \{0, 1\}^n$ con $n \geq 2$, $\vec{a} \neq \vec{b}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ y $\vec{b} \neq \vec{0}$. Demuestre que para cada $v_1, v_2 \in \{0, 1\}$:

$$|\{\vec{c} \mid \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle = v_1 \wedge \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle = v_2\}| = 2^{n-2}$$

2. Demuestre que existe un algoritmo aleatorizado $\mathcal{A}$ para contar el número de valuaciones de una fórmula proposicional tal que $\mathcal{A}$ funciona en tiempo polinomial, $\mathcal{A}$ utiliza un oráculo para SAT y para cada fórmula proposicional φ :

$$\Pr\left(|\mathcal{A}(\varphi) - \#\text{SAT}(\varphi)| \leq \frac{1}{2} \cdot \#\text{SAT}(\varphi)\right) \geq \frac{1}{16}$$

3. Demuestre que existe un algoritmo aleatorizado $\mathcal{B}$ que funciona en tiempo polinomial, utiliza un oráculo para SAT y para cada fórmula proposicional φ no anulable: si φ es inconsistente, entonces $\mathcal{B}(\varphi)$ retorna **no**, y si φ es consistente, entonces $\mathcal{B}(\varphi)$ retorna **sin_resultado** o una valuación σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$. Además, si φ es consistente, entonces:

$$\Pr\left(\mathcal{B}(\varphi) \text{ retorne } \text{sin_resultado}\right) \leq \frac{15}{16}$$

y para cada valuación σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$:

$$\left(1 - \frac{15}{16}\right) \cdot \frac{1}{\#\text{SAT}(\varphi)} \leq \Pr(\mathcal{B}(\varphi) \text{ retorne } \sigma) \leq \left(1 + \frac{15}{16}\right) \cdot \frac{1}{\#\text{SAT}(\varphi)}$$

4. En este problema usted debe pensar como extender el algoritmo $\mathcal{B}$ en la pregunta anterior para el caso de fórmulas proposicionales arbitrarias (tanto anulables o como no anulables). Vale decir, debe demostrar que existen $p, \varepsilon \in [0, 1)$ y un algoritmo aleatorizado $\mathcal{C}$ que funciona en tiempo polinomial, utiliza un oráculo para SAT y para cada fórmula proposicional φ : si φ es inconsistente, entonces $\mathcal{C}(\varphi)$ retorna **no**, y si φ es consistente, entonces $\mathcal{C}(\varphi)$ retorna **sin_resultado** o una valuación σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$. Además, si φ es consistente, entonces:

$$\Pr(\mathcal{C}(\varphi) \text{ retorne } \text{sin_resultado}) \leq p$$

y para cada valuación σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$:

$$(1 - \varepsilon) \cdot \frac{1}{\#\text{SAT}(\varphi)} \leq \Pr(\mathcal{C}(\varphi) \text{ retorne } \sigma) \leq (1 + \varepsilon) \cdot \frac{1}{\#\text{SAT}(\varphi)}$$