



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Tópicos Avanzados en Teoría de la Computación - IIC3810
Lista de Ejercicios 4

1. Demuestre que $FP \subseteq \#P$.
2. Demuestre que las dos nociones de reducción definidas en clases para funciones son transitivas. Vale decir, demuestre que:
 - (a) Si $f_1 \leq_{par}^p f_2$ y $f_2 \leq_{par}^p f_3$, entonces $f_1 \leq_{par}^p f_3$.
 - (b) Si $f_1 \leq_T^p f_2$ y $f_2 \leq_T^p f_3$, entonces $f_1 \leq_T^p f_3$.
3. Demuestre que $\#CNF-SAT$ es $\#P$ -completo bajo reducciones parsimoniosas.

En los siguientes ejercicios suponga, al igual que en clases, que si una Máquina de Turing (que puede ser calculadora) con un alfabeto de entrada Σ funciona en tiempo polinomial, entonces existe un polinomio $p(n)$ tal que para cada $w \in \Sigma^*$ y cada ejecución de M con entrada w , el número de pasos en la ejecución es menor o igual a $p(|w|)$.

3. Sea M una MTC no determinista que funciona en tiempo polinomial y tiene alfabeto de entrada y salida Σ , y sea $w \in \Sigma^*$. Decimos que una palabra $w' \in \Sigma^*$ es una salida para w si existe una ejecución de M con entrada w que se detiene en un estado final y retorna w' (al detenerse la cinta de salida de M tiene a la palabra w' precedida del símbolo $\vdash$ y seguida por una secuencia infinita de símbolos B). Además, definimos $\text{output}_M(w)$ como el número de salidas distintas para w .

Defina SpanP como la siguiente clase de funciones. Una función $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ está en SpanP si y sólo si existe una MTC no determinista M tal que el alfabeto de entrada y salida de M es Σ , M funciona en tiempo polinomial y $f(w) = \text{output}_M(w)$ para cada $w \in \Sigma^*$.

- (a) Sea $\#SUB-3-COL$ una función que, dado un grafo G no dirigido, retorna el número de subgrafos inducidos G' de G tal que G' es 3-coloreable. Muestre que $\#SUB-3-COL$ está en SpanP .
- (b) Demuestre que $\#P \subseteq \text{SpanP}$.
4. Defina UP como la siguiente clase de lenguajes (UP es una clase de problemas de decisión). Un lenguaje L sobre un alfabeto Σ está en UP si y sólo si existe una MT M no determinista tal que el alfabeto de entrada de M es Σ , M funciona en tiempo polinomial y para todo $w \in \Sigma^*$:
 - si $w \in L$, entonces $\text{accept}_M(w) = 1$, y
 - si $w \notin L$, entonces $\text{accept}_M(w) = 0$.

Nótese que $UP \subseteq NP$. Demuestre que $\#P = \text{SpanP}$ si y sólo si $UP = NP$.

5. Sea M una MT no determinista que funciona en tiempo polinomial y tiene alfabeto de entrada Σ , y sea $w \in \Sigma^*$. Definimos $\text{total}_M(w)$ como el número total de ejecuciones de M con entrada w (sin importar si la ejecución termina en un estado final).

Defina TotP como la siguiente clase de funciones. Una función $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ está en TotP si y sólo si existe una MT no determinista M tal que el alfabeto de entrada de M es Σ , M funciona en tiempo polinomial y $f(w) = \text{total}_M(w) - 1$ para cada $w \in \Sigma^*$.

- (a) Demuestre que $\text{TotP} \subseteq \#P$.
- (b) Demuestre que $\#\text{DNF-SAT} \in \text{TotP}$, y desde esto concluya que $\#P \subseteq \text{FP}^{\text{TotP}}$.
- (c) Demuestre que para cada $f \in \text{TotP}$, se tiene que $L_f \in \text{PTIME}$. Nótese que de esto se concluye que $\#\text{CNF-SAT} \notin \text{TotP}$, a menos que $\text{PTIME} = \text{NP}$.