



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
 ESCUELA DE INGENIERIA
 DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Tópicos Avanzados en Teoría de la Computación - IIC3810
Lista de Ejercicios 3

1. Demuestre las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \text{PTIME}^{\text{NP} \cap \text{co-NP}} &= \text{NP} \cap \text{co-NP} \\ \text{NP}^{\text{NP} \cap \text{co-NP}} &= \text{NP} \end{aligned}$$

2. En clases definimos el problema U como:

$$U = \{(M, w) \mid M \text{ es una MT, } w \in \{0, 1\}^* \text{ y } M \text{ se detiene con entrada } w\},$$

y mostramos que está en la clase RE. Demuestre que U es RE-hard bajo la noción de reducción $\leq_m^p$.

3. Demuestre el lema de Schwartz-Zippel. Vale decir, demuestre que dado un polinomio no nulo $p(x_1, \dots, x_n)$ de grado k y un subconjunto finito y no vacío A de $\mathbb{Q}$, si $a_1, \dots, a_n$ son elegidos de manera uniforme e independiente desde A , entonces:

$$\Pr(p(a_1, \dots, a_n) = 0) \leq \frac{k}{|A|}$$

4. En clases demostramos que para cada problema en $\text{RP} \cap \text{co-RP}$, existe un algoritmo que lo decide en tiempo polinomial esperado. En esta pregunta usted va a demostrar que la dirección opuesta también es cierta, lo que nos permite concluir que $\text{RP} \cap \text{co-RP}$ corresponde exactamente con la clase de problemas para los cuales existe un algoritmo que lo decide en tiempo polinomial esperado.

Sea L un lenguaje sobre un alfabeto Σ , y suponga que M es una MT probabilística tal que: (i) el alfabeto de entrada de M es Σ ; (ii) M funciona en tiempo polinomial; (iii) para cada $w \in \Sigma^*$, M retorna **sí**, **no** o **indefinido**; (iv) para cada $w \in \Sigma^*$ y $s \in \{0, 1\}^*$, si $M(w, s)$ retorna **sí**, entonces $w \in L$, y si $M(w, s)$ retorna **no**, entonces $w \notin L$; (v) existe un valor p fijo con $0 < p \leq 1$ tal que para cada $w \in \Sigma^*$, $\Pr_s(M(w, s) \text{ retorne } \mathbf{sí} \text{ o } \mathbf{no}) = p$. Demuestre que $L \in \text{RP} \cap \text{co-RP}$.