¿Cuál es la idea central en la técnica mostrada?

Sea (G, k) una entrada de GIS con $k \geq 1$

- Sabemos que $(G, k) \in \text{GIS}$ si y sólo si $|I^1(G, k)| \geq 1$

¿Cuál es la idea central en la técnica mostrada?

Sea (G, k) una entrada de GIS con $k \geq 1$

- Sabemos que $(G, k) \in \text{GIS}$ si y sólo si $|I^1(G, k)| \geq 1$

Dado que $|I^1(G, k)| = \#\text{LIS}(G, k) - \#\text{LIS}(G, k-1)$, podemos intentar utilizar un FPRAS para #LIS para determinar si $(G, k) \in \text{GIS}$

¿Cuál es la idea central en la técnica mostrada?

Sea (G, k) una entrada de GIS con $k \geq 1$

- Sabemos que $(G, k) \in \text{GIS}$ si y sólo si $|I^1(G, k)| \geq 1$

Dado que $|I^1(G, k)| = \#\text{LIS}(G, k) - \#\text{LIS}(G, k-1)$, podemos intentar utilizar un FPRAS para #LIS para determinar si $(G, k) \in \text{GIS}$

- Generamos así un algoritmo aleatorizado de tiempo polinomial para GIS

¿Cuál es la idea central en la técnica mostrada?

Sea (G, k) una entrada de GIS con $k \geq 1$

- Sabemos que $(G, k) \in \text{GIS}$ si y sólo si $|I^1(G, k)| \geq 1$

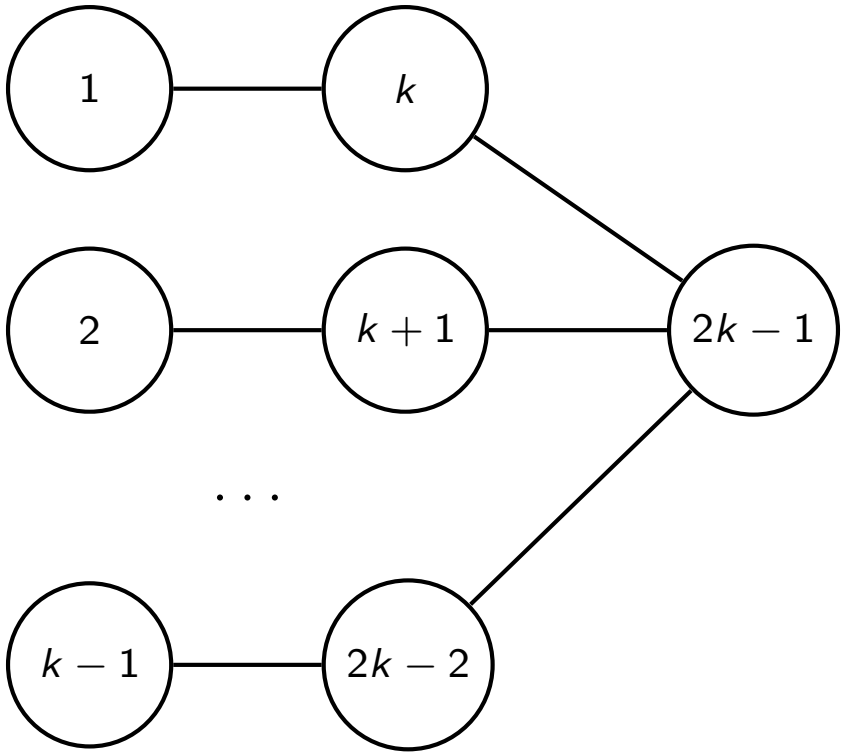
Dado que $|I^1(G, k)| = \#\text{LIS}(G, k) - \#\text{LIS}(G, k-1)$, podemos intentar utilizar un FPRAS para #LIS para determinar si $(G, k) \in \text{GIS}$

- Generamos así un algoritmo aleatorizado de tiempo polinomial para GIS

El éxito de este enfoque depende de qué tan grande sea el valor de $\#\text{LIS}(G, k) - \#\text{LIS}(G, k-1)$

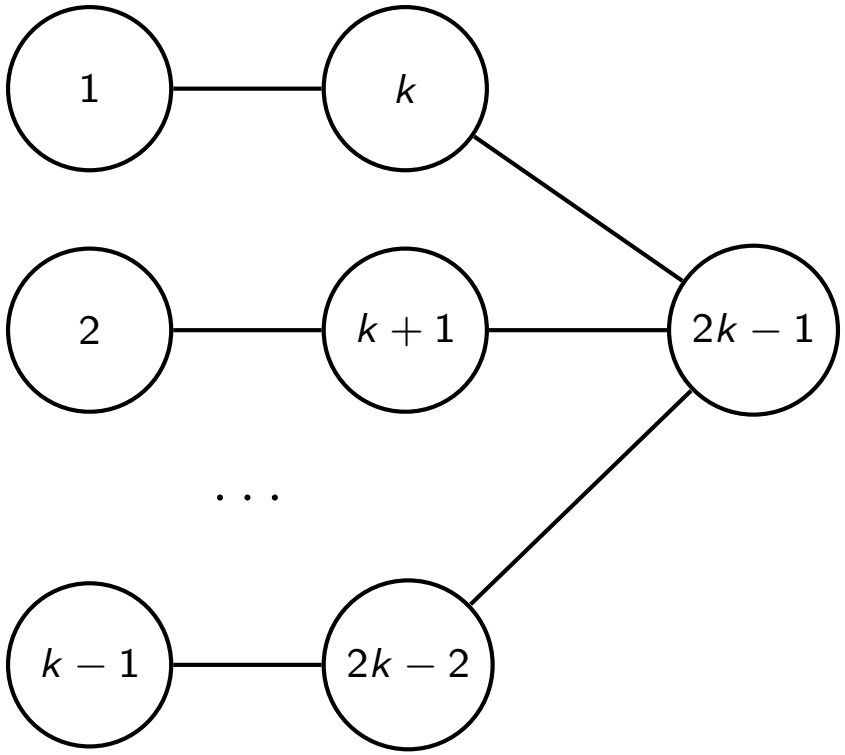
¿Qué tan grande es $\#\mathsf{LIS}(H, k) - \#\mathsf{LIS}(H, k-1)$?

Considere el siguiente grafo H:



¿Qué tan grande es $\#\mathsf{LIS}(H, k) - \#\mathsf{LIS}(H, k-1)$?

Considere el siguiente grafo H:



En este caso tenemos que $|I^1(H, k)| = \#\mathsf{LIS}(H, k) - \#\mathsf{LIS}(H, k-1) = 1$

- Además, $\#\mathsf{LIS}(H, k-1) \geq 3^{k-1}$

Amplificando la diferencia

La diferencia entre $\#\text{LIS}(G, k)$ y $\#\text{LIS}(G, k-1)$ puede ser pequeña.

- La utilización de un FPRAS para #LIS no nos garantiza la existencia de un algoritmo aleatorizado de tiempo polinomial para GIS
  - No podemos acotar superiormente el error de algoritmo

Amplificando la diferencia

La diferencia entre $\#\text{LIS}(G, k)$ y $\#\text{LIS}(G, k-1)$ puede ser pequeña.

- La utilización de un FPRAS para #LIS no nos garantiza la existencia de un algoritmo aleatorizado de tiempo polinomial para GIS
  - No podemos acotar superiormente el error de algoritmo

Para solucionar este problema *amplificamos* $\#\text{LIS}(G, k) - \#\text{LIS}(G, k-1)$

Amplificando la diferencia

De manera más precisa, de la definición de G^r tenemos:

$\#\text{LIS}(G, k) - \#\text{LIS}(G, k-1) > 0$ si y sólo si

$$\#\text{LIS}(G^r, k \cdot r) - \#\text{LIS}(G^r, (k-1) \cdot r) > 0$$

Amplificando la diferencia

De manera más precisa, de la definición de G^r tenemos:

$\#\text{LIS}(G, k) - \#\text{LIS}(G, k-1) > 0$ si y sólo si

$$\#\text{LIS}(G^r, k \cdot r) - \#\text{LIS}(G^r, (k-1) \cdot r) > 0$$

Así, usamos la diferencia más grande $\#\text{LIS}(G^r, k \cdot r) - \#\text{LIS}(G^r, (k-1) \cdot r)$ para verificar si $\#\text{LIS}(G, k) - \#\text{LIS}(G, k-1) > 0$

¿Cuánto amplificando la diferencia?

Suponiendo que G tiene n nodos y tomando $r = n + 3$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\#\mathsf{LIS}(G^r, k \cdot r) - \#\mathsf{LIS}(G^r, (k-1) \cdot r) &\geq (2^r - 1)^k - 2^n \cdot (2^r - 1)^{k-1} \\
&= (2^{n+3} - (2^n + 1)) \cdot (2^{n+3} - 1)^{k-1} \\
&\geq (2^{n+3} - 2^{n+1}) \cdot (2^{n+3} - 1)^{k-1} \\
&= 3 \cdot 2^{n+1} \cdot (2^{n+3} - 1)^{k-1}
\end{aligned}$$

¿Cuánto amplificando la diferencia?

Suponiendo que G tiene n nodos y tomando $r = n + 3$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \#\mathsf{LIS}(G^r, k \cdot r) - \#\mathsf{LIS}(G^r, (k-1) \cdot r) &\geq (2^r - 1)^k - 2^n \cdot (2^r - 1)^{k-1} \\ &= (2^{n+3} - (2^n + 1)) \cdot (2^{n+3} - 1)^{k-1} \\ &\geq (2^{n+3} - 2^{n+1}) \cdot (2^{n+3} - 1)^{k-1} \\ &= 3 \cdot 2^{n+1} \cdot (2^{n+3} - 1)^{k-1} \end{aligned}$$

¡Podemos entonces verificar si $\#\mathsf{LIS}(G, k) - \#\mathsf{LIS}(G, k-1) > 0$ considerando una brecha de tamaño exponencial en n!

Una tercera aplicación de la técnica

Sea $G = (N, A)$ un grafo (dirigido) sin loops.

Decimos que $(v_1, \ldots, v_n)$ es un ciclo simple en G si:

1. $n \geq 2$
2. $(v_i, v_{i+1}) \in A$ para cada $1 \leq i \leq n-1$, y $(v_n, v_1) \in A$
3. $v_i \neq v_j$ para cada $1 \leq i < j \leq n$

Un ciclo simple $(v_1, \ldots, v_n)$ con n vértices puede ser visto como un conjunto con n arcos:

$$\{(v_1, v_2), \ldots (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\}$$

En este capítulo utilizamos esta representación de los ciclos simples, y decimos que el largo de este ciclo es n

Una tercera aplicación de la técnica

Sea #CicloSimple una función que, dado un grafo G, retorna el número de ciclos simples en G

Una tercera aplicación de la técnica

Sea #CicloSimple una función que, dado un grafo G, retorna el número de ciclos simples en G

Ejercicio

Muestre que $L_{\#\text{CicloSimple}} \in \text{PTIME}$

Una tercera aplicación de la técnica

Sea #CicloSimple una función que, dado un grafo G, retorna el número de ciclos simples en G

Ejercicio

Muestre que $L_{\#\text{CicloSimple}} \in \text{PTIME}$

Teorema

Si existe un FPRAS para #CicloSimple, entonces NP $\subseteq$ BPP

#CicloSimple no admite un FPRAS: demostración

Sea HAM $= \{G \mid G$ tiene un ciclo hamiltoniano$\}$

Vamos a demostrar que si existe un FPRAS para #CicloSimple, entonces HAM $\in$ BPP

- Dado que HAM es NP-completo, se concluye que NP $\subseteq$ BPP

#CicloSimple no admite un FPRAS: demostración

Sea HAM $= \{G \mid G$ tiene un ciclo hamiltoniano$\}$

Vamos a demostrar que si existe un FPRAS para #CicloSimple, entonces HAM $\in$ BPP

- Dado que HAM es NP-completo, se concluye que NP $\subseteq$ BPP

Sea $G = (N, A)$ un grafo con $|N| = n$ y $n \geq 2$

- G es una entrada de HAM

¿Cómo construimos el grafo aumentado?

A partir de un ciclo simple con ℓ nodos esperamos generar $2^{\ell \cdot r}$ ciclos simples en el grafo aumentado

¿Cómo construimos el grafo aumentado?

A partir de un ciclo simple con ℓ nodos esperamos generar $2^{\ell \cdot r}$ ciclos simples en el grafo aumentado

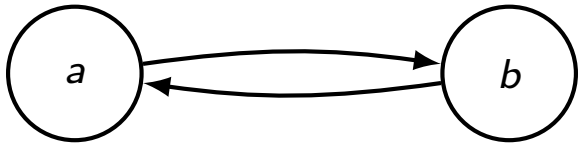
- Primer intento: construir G^r como para el caso de #LIS

¿Cómo construimos el grafo aumentado?

A partir de un ciclo simple con ℓ nodos esperamos generar $2^{\ell \cdot r}$ ciclos simples en el grafo aumentado

- Primer intento: construir G^r como para el caso de #LIS

Considere el siguiente grafo H:

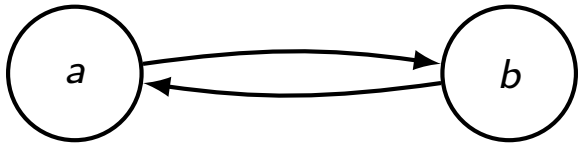


¿Cómo construimos el grafo aumentado?

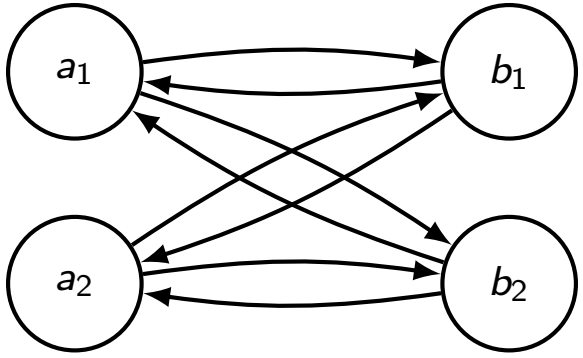
A partir de un ciclo simple con ℓ nodos esperamos generar $2^{\ell \cdot r}$ ciclos simples en el grafo aumentado

- Primer intento: construir G^r como para el caso de #LIS

Considere el siguiente grafo H:



En este caso H^2 es el siguiente grafo:



¿Cómo construimos el grafo aumentado?

En H tenemos un ciclo simple y esperamos tener 2^2 ciclos simples en H^2

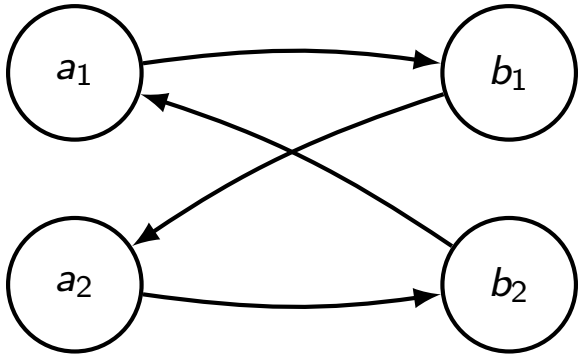
- (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1) y (a_2, b_2)

¿Cómo construimos el grafo aumentado?

En H tenemos un ciclo simple y esperamos tener 2^2 ciclos simples en H^2

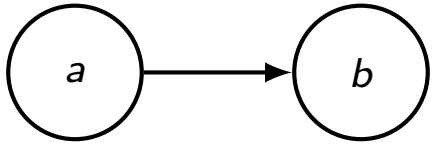
- (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1) y (a_2, b_2)

El problema es que H^2 contiene otros ciclos simples:



¿Cómo construimos el grafo aumentado?

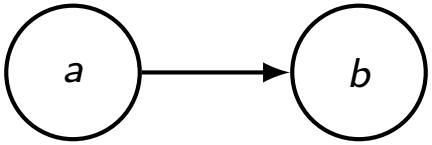
Segundo intento: reemplazamos cada arco



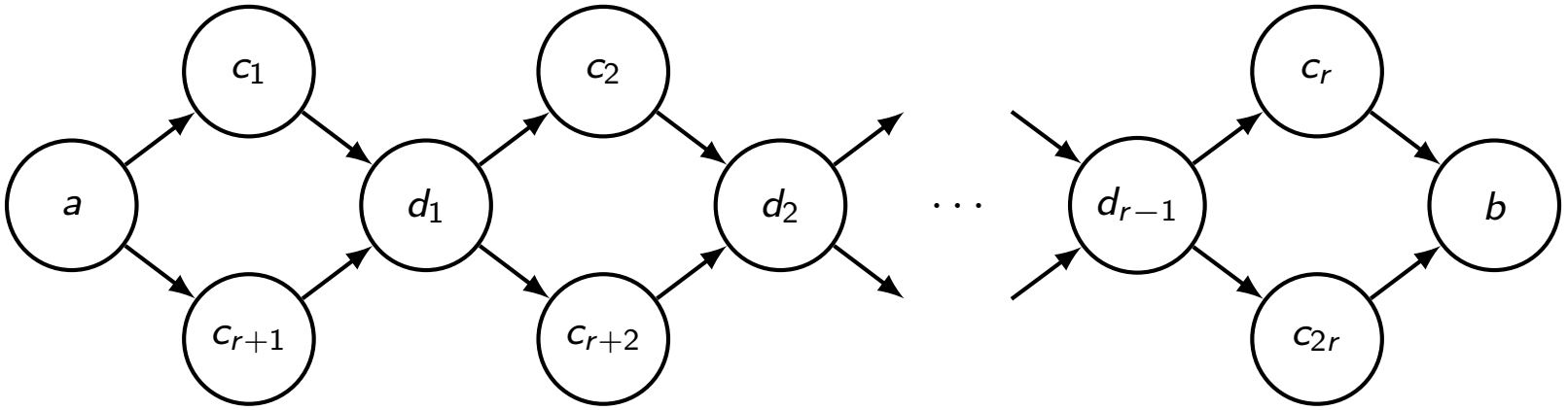
por

¿Cómo construimos el grafo aumentado?

Segundo intento: reemplazamos cada arco



por



donde $c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_{2r}, d_1, \ldots, d_{r-1}$ son nodos nuevos creados para reemplazar un arco.

El grafo aumentado

Sea G^r el grafo definido reemplazando cada arco como fue mostrado en la transparencia anterior.

Ejercicio

Defina formalmente el grafo G^r

El grafo aumentado

Sea G^r el grafo definido reemplazando cada arco como fue mostrado en la transparencia anterior.

Ejercicio

Defina formalmente el grafo G^r

Dado que G no tiene loops puede tener a lo más $n \cdot (n-1)$ arcos

- Por lo tanto, G^r tiene a lo más $n + n \cdot (n-1) \cdot (3 \cdot r - 1)$ nodos, y es de tamaño polinomial en el tamaño de G

La noción de testigo

Cada ciclo simple de G de largo $\ell \geq 2$ corresponde con $2^{\ell \cdot r}$ ciclos de G^r de largo $2 \cdot \ell \cdot r$

- Cada uno de estos ciclos de largo $2 \cdot \ell \cdot r$ en G^r es considerado como un testigo del ciclo de largo ℓ en G

Cada ciclo simple de G^r es testigo de un único ciclo simple de G

La noción de testigo

Cada ciclo simple de G de largo $\ell \geq 2$ corresponde con $2^{\ell \cdot r}$ ciclos de G^r de largo $2 \cdot \ell \cdot r$

- Cada uno de estos ciclos de largo $2 \cdot \ell \cdot r$ en G^r es considerado como un testigo del ciclo de largo ℓ en G

Cada ciclo simple de G^r es testigo de un único ciclo simple de G

Ejercicio

Formalice la noción de testigo.

La noción de testigo

La conexión fundamental entre los grafos:

$G \in \text{HAM}$ si y sólo si G^r tiene un cliclo simple de largo $2 \cdot r \cdot n$

La noción de testigo

La conexión fundamental entre los grafos:

$G \in \text{HAM}$ si y sólo si G^r tiene un cliclo simple de largo $2 \cdot r \cdot n$

Utilizando esta conexión y eligiendo un valor adecuado para r vamos a construir un algoritmo aleatorizado de tiempo polinomial para HAM

- Teniendo como hipótesis la existencia de un FPRAS para #CicloSimple

El número de testigos

Definimos los conjuntos:

$$
\begin{aligned}
I^r(G) &= \{C \mid C \text{ es un ciclo simple en } G^r \text{ de largo } 2 \cdot r \cdot n\} \\
M^r(G) &= \{C \mid C \text{ es un ciclo simple en } G^r \text{ de largo menor que } 2 \cdot r \cdot n\}
\end{aligned}
$$

Tenemos que $G \in \text{HAM}$ si y sólo si $I^r(G) \neq \emptyset$

- Suponiendo la existencia de un FPRAS para #CicloSimple, vamos a desarrollar un algoritmo aleatorizado de tiempo polinomial para verificar si $I^r(G) \neq \emptyset$

El número de testigos

Para $\ell \in \{2, 3, \ldots, n\}$ definimos t_ℓ como la cantidad de testigos en G^r para un ciclo simple en G de largo ℓ

El número de testigos

Para $\ell \in \{2, 3, \ldots, n\}$ definimos t_ℓ como la cantidad de testigos en G^r para un ciclo simple en G de largo ℓ

Por la definición de G^r tenemos que $t_\ell = 2^{\ell \cdot r}$

El número de testigos

Para $\ell \in \{2, 3, \ldots, n\}$ definimos t_ℓ como la cantidad de testigos en G^r para un ciclo simple en G de largo ℓ

Por la definición de G^r tenemos que $t_\ell = 2^{\ell \cdot r}$

Además, el número de ciclos simples en G de largo ℓ está acotado por:

$$\binom{n \cdot (n-1)}{\ell}$$

El número de testigos

A partir de lo anterior concluimos que:

$$
\begin{aligned}
|M^r(G)| &\leq \sum_{\ell=2}^{n-1} \binom{n\cdot(n-1)}{\ell} t_\ell \\
&\leq \sum_{\ell=2}^{n-1} \binom{n\cdot(n-1)}{\ell} t_{n-1} \\
&\leq t_{n-1} \sum_{\ell=0}^{n\cdot(n-1)} \binom{n\cdot(n-1)}{\ell} \\
&= 2^{n\cdot(n-1)} \cdot t_{n-1} \\
&= 2^{n\cdot(n-1)} \cdot 2^{(n-1)\cdot r} \\
&= 2^{(n-1)\cdot(n+r)}
\end{aligned}
$$

Idea fundamental: aumentando las diferencias

Por otra parte, si $G \in \text{HAM}$ tenemos que:

$$|I^r(G)| \geq t_n = 2^{n \cdot r}$$

Idea fundamental: aumentando las diferencias

Por otra parte, si $G \in \text{HAM}$ tenemos que:

$$|I^r(G)| \geq t_n = 2^{n \cdot r}$$

Concluimos que:

- Si $G \notin \text{HAM}$: $\#\text{CicloSimple}(G^r) = |M^r(G)| \leq 2^{(n-1)\cdot(n+r)}$
- Si $G \in \text{HAM}$: $\#\text{CicloSimple}(G^r) \geq |I^r(G)| \geq 2^{n \cdot r}$

Idea fundamental: aumentando las diferencias

Por otra parte, si $G \in \text{HAM}$ tenemos que:

$$|I^r(G)| \geq t_n = 2^{n \cdot r}$$

Concluimos que:

- Si $G \notin \text{HAM}$: $\#\text{CicloSimple}(G^r) = |M^r(G)| \leq 2^{(n-1)\cdot(n+r)}$
- Si $G \in \text{HAM}$: $\#\text{CicloSimple}(G^r) \geq |I^r(G)| \geq 2^{n \cdot r}$

En las siguientes transparencias vamos a obtener un valor de r que nos permita tener un algoritmo aleatorizado de tiempo polinomial para HAM

Un algoritmo aleatorizado para HAM

Suponemos que existe un FPRAS $\mathcal{A}$ para #CicloSimple, y mostramos como esto puede ser utilizado para obtener que HAM $\in$ BPP

Un algoritmo aleatorizado para HAM

Suponemos que existe un FPRAS $\mathcal{A}$ para #CicloSimple, y mostramos como esto puede ser utilizado para obtener que HAM $\in$ BPP

Definimos el siguiente algoritmo aleatorizado $\mathcal{B}$ para HAM:

1. Dada la entrada G, donde G es un grafo con n nodos, si $n \leq 1$ retorne **no**, en otro caso vaya al paso 2
2. Genere el grafo G^r
3. Sea s el resultado de ejecutar $\mathcal{A}(G^r, \frac{1}{2})$
4. Si $s > (1 + \frac{1}{2}) \cdot 2^{(n-1)\cdot(n+r)}$, entonces retorne **sí**, en caso contrario retorne **no**

Un algoritmo aleatorizado para HAM

Suponemos que existe un FPRAS $\mathcal{A}$ para #CicloSimple, y mostramos como esto puede ser utilizado para obtener que HAM $\in$ BPP

Definimos el siguiente algoritmo aleatorizado $\mathcal{B}$ para HAM:

1. Dada la entrada G, donde G es un grafo con n nodos, si $n \leq 1$ retorne **no**, en otro caso vaya al paso 2
2. Genere el grafo G^r
3. Sea s el resultado de ejecutar $\mathcal{A}(G^r, \frac{1}{2})$
4. Si $s > (1 + \frac{1}{2}) \cdot 2^{(n-1)\cdot(n+r)}$, entonces retorne **sí**, en caso contrario retorne **no**

Nótese que $\mathcal{B}$ funciona en tiempo polinomial en el tamaño de la entrada G si el valor de r es polinomial en n

- Recuerde que tenemos que determinar el valor de r

La probabilidad de error del algoritmo

Si $G \notin$ HAM obtenemos que **Pr**($\mathcal{B}(G)$ retorne **sí**) es igual a:

La probabilidad de error del algoritmo

Si $G \notin$ HAM obtenemos que $\mathbf{Pr}(\mathcal{B}(G)$ retorne **sí**$)$ es igual a:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Pr}(\mathcal{A}(G^r, \tfrac{1}{2}) > (1+\tfrac{1}{2}) \cdot 2^{(n-1)\cdot(n+r)}) \\
&\quad \leq \mathbf{Pr}(\mathcal{A}(G^r, \tfrac{1}{2}) > (1+\tfrac{1}{2}) \cdot \#\mathsf{CicloSimple}(G^r)) \\
&\quad \leq \mathbf{Pr}(\mathcal{A}(G^r, \tfrac{1}{2}) > (1+\tfrac{1}{2}) \cdot \#\mathsf{CicloSimple}(G^r)) \vee \\
&\qquad\qquad \mathcal{A}(G^r, \tfrac{1}{2}) < (1-\tfrac{1}{2}) \cdot \#\mathsf{CicloSimple}(G^r)) \\
&\quad = 1 - \mathbf{Pr}(\mathcal{A}(G^r, \tfrac{1}{2}) \leq (1+\tfrac{1}{2}) \cdot \#\mathsf{CicloSimple}(G^r) \wedge \\
&\qquad\qquad \mathcal{A}(G^r, \tfrac{1}{2}) \geq (1-\tfrac{1}{2}) \cdot \#\mathsf{CicloSimple}(G^r)) \\
&\quad = 1 - \mathbf{Pr}(|\mathcal{A}(G^r, \tfrac{1}{2}) - \#\mathsf{CicloSimple}(G^r)| \leq \tfrac{1}{2} \cdot \#\mathsf{CicloSimple}(G^r)) \\
&\quad \leq 1 - \tfrac{3}{4} \;=\; \tfrac{1}{4}
\end{aligned}
$$

La probabilidad de error del algoritmo

Consideramos ahora el caso en que $G \in \text{HAM}$

La probabilidad de error del algoritmo

Consideramos ahora el caso en que $G \in \text{HAM}$

Primero debemos encontrar un valor de r tal que:

$$(1 - \frac{1}{2}) \cdot \#\text{CicloSimple}(G^r) \quad > \quad (1 + \frac{1}{2}) \cdot 2^{(n-1)\cdot(n+r)}$$

Dado que $\#\text{CicloSimple}(G^r) \geq 2^{n \cdot r}$, basta entonces encontrar un valor de r tal que:

$$(1 - \frac{1}{2}) \cdot 2^{n \cdot r} \quad > \quad (1 + \frac{1}{2}) \cdot 2^{(n-1)\cdot(n+r)}$$

La probabilidad de error del algoritmo

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
& (1-\frac{1}{2})\cdot 2^{n\cdot r} > (1+\frac{1}{2})\cdot 2^{(n-1)\cdot(n+r)} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}\cdot 2^{n\cdot r} > \frac{3}{2}\cdot 2^{(n-1)\cdot(n+r)} \\
\Leftrightarrow \quad & 2^{n\cdot r} > 3\cdot 2^{(n-1)\cdot(n+r)} \\
\Leftrightarrow \quad & 2^{n\cdot r} > 2^{(n-1)\cdot(n+r)+\log_2(3)} \\
\Leftrightarrow \quad & n\cdot r > n\cdot(n-1)+(n-1)\cdot r+\log_2(3) \\
\Leftrightarrow \quad & r > n\cdot(n-1)+\log_2(3)
\end{aligned}
$$

La probabilidad de error del algoritmo

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
& (1-\frac{1}{2})\cdot 2^{n\cdot r} > (1+\frac{1}{2})\cdot 2^{(n-1)\cdot(n+r)} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}\cdot 2^{n\cdot r} > \frac{3}{2}\cdot 2^{(n-1)\cdot(n+r)} \\
\Leftrightarrow \quad & 2^{n\cdot r} > 3\cdot 2^{(n-1)\cdot(n+r)} \\
\Leftrightarrow \quad & 2^{n\cdot r} > 2^{(n-1)\cdot(n+r)+\log_2(3)} \\
\Leftrightarrow \quad & n\cdot r > n\cdot(n-1)+(n-1)\cdot r+\log_2(3) \\
\Leftrightarrow \quad & r > n\cdot(n-1)+\log_2(3)
\end{aligned}
$$

Considerando $r = n\cdot(n-1)+2$ se cumple la condición.

- Concluimos que $(1-\frac{1}{2})\cdot \#\text{CicloSimple}(G^r) > (1+\frac{1}{2})\cdot 2^{n\cdot(n-1)+(n-1)\cdot r}$

La probabilidad de error del algoritmo

Si $G \in \text{HAM}$ y $r = n \cdot (n-1) + 2$ tenemos que $\mathbf{Pr}(\mathcal{B}(G)$ retorne **no**$)$ es igual a:

La probabilidad de error del algoritmo

Si $G \in \text{HAM}$ y $r = n \cdot (n-1) + 2$ tenemos que $\mathbf{Pr}(\mathcal{B}(G)$ retorne **no**$)$ es igual a:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Pr}(\mathcal{A}(G^r, \tfrac{1}{2}) \leq (1 + \tfrac{1}{2}) \cdot 2^{(n-1)\cdot(n+r)}) \\
&\quad \leq \mathbf{Pr}(\mathcal{A}(G^r, \tfrac{1}{2}) < (1 - \tfrac{1}{2}) \cdot \#\text{CicloSimple}(G^r)) \\
&\quad \leq \mathbf{Pr}(\mathcal{A}(G^r, \tfrac{1}{2}) < (1 - \tfrac{1}{2}) \cdot \#\text{CicloSimple}(G^r) \vee \\
&\qquad\qquad \mathcal{A}(G^r, \tfrac{1}{2}) > (1 + \tfrac{1}{2}) \cdot \#\text{CicloSimple}(G^r)) \\
&\quad = 1 - \mathbf{Pr}(\mathcal{A}(G^r, \tfrac{1}{2}) \geq (1 - \tfrac{1}{2}) \cdot \#\text{CicloSimple}(G^r) \wedge \\
&\qquad\qquad \mathcal{A}(G^r, \tfrac{1}{2}) \leq (1 + \tfrac{1}{2}) \cdot \#\text{CicloSimple}(G^r)) \\
&\quad = 1 - \mathbf{Pr}(|\mathcal{A}(G^r, \tfrac{1}{2}) - \#\text{CicloSimple}(G^r)| \leq \tfrac{1}{2} \cdot \#\text{CicloSimple}(G^r)) \\
&\quad \leq 1 - \tfrac{3}{4} \;=\; \tfrac{1}{4}
\end{aligned}
$$

#CicloSimple no admite un FPRAS: conclusión

Tenemos que en ambos casos el error del algoritmo $\mathcal{B}$ está acotado superiormente por $\frac{1}{4}$

- Considerando $r = n \cdot (n-1) + 2$ en ambos casos

Concluimos entonces que HAM $\in$ BPP

- Por lo tanto NP $\subseteq$ BPP

La existencia de FPRAS y las reducciones parsimoniosas

Sean $f, g : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ dos funciones en #P

Teorema

Si $f \leq^p_{par} g$ y existe un FPRAS para g, entonces existe un FPRAS para f

La existencia de FPRAS y las reducciones parsimoniosas

Sean $f, g : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ dos funciones en #P

Teorema

Si $f \leq^p_{par} g$ y existe un FPRAS para g, entonces existe un FPRAS para f

Demostración: Suponga que $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ es una función computable en tiempo polinomial tal que $f(w) = g(h(w))$ para todo $w \in \Sigma^*$

La existencia de FPRAS y las reducciones parsimoniosas

Además, suponga que $\mathcal{A}$ es un FPRAS para g, y defina un algoritmo aleatorizado $\mathcal{B} : \Sigma^* \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

Para cada $w \in \Sigma^*$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$: $\mathcal{B}(w, \varepsilon) = \mathcal{A}(h(w), \varepsilon)$

La existencia de FPRAS y las reducciones parsimoniosas

Además, suponga que $\mathcal{A}$ es un FPRAS para g, y defina un algoritmo aleatorizado $\mathcal{B} : \Sigma^* \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

Para cada $w \in \Sigma^*$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$: $\mathcal{B}(w, \varepsilon) = \mathcal{A}(h(w), \varepsilon)$

Para cada $w \in \Sigma^*$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Pr}\Big(|\mathcal{B}(w,\varepsilon) - f(w)| \leq \varepsilon \cdot f(w)\Big) & \\ = \mathbf{Pr}\Big(|\mathcal{A}(h(w),\varepsilon) - g(h(w))| \leq \varepsilon \cdot g(h(w))\Big) & \\ \geq \frac{3}{4} & \end{aligned}$$

La existencia de FPRAS y las reducciones parsimoniosas

Además, suponga que $\mathcal{A}$ es un FPRAS para g, y defina un algoritmo aleatorizado $\mathcal{B} : \Sigma^* \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

Para cada $w \in \Sigma^*$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$: $\mathcal{B}(w, \varepsilon) = \mathcal{A}(h(w), \varepsilon)$

Para cada $w \in \Sigma^*$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Pr}\Big(|\mathcal{B}(w,\varepsilon) - f(w)| \leq \varepsilon \cdot f(w)\Big) & \\ = \mathbf{Pr}\Big(|\mathcal{A}(h(w),\varepsilon) - g(h(w))| \leq \varepsilon \cdot g(h(w))\Big) & \\ \geq \frac{3}{4} & \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{B}$ es un FPRAS para f $\square$

Utilizando las reducciones parsimoniosas

Suponiendo que $f \leq^{p}_{par} g$, el resultado anterior puede utilizarse de dos formas:

- Si tenemos un FPRAS para g, entonces podemos construir un FPRAS para f
- Si tenemos una demostración que no existe un FPRAS para f, entonces concluimos que no existe un FPRAS para g

Utilizando las reducciones parsimoniosas

Suponiendo que $f \leq^{p}_{par} g$, el resultado anterior puede utilizarse de dos formas:

- Si tenemos un FPRAS para g, entonces podemos construir un FPRAS para f
- Si tenemos una demostración que no existe un FPRAS para f, entonces concluimos que no existe un FPRAS para g

Vamos a encontrar otras funciones que no admiten FPRAS utilizando el resultado anterior.

Contando el número de cliques

Dado un grafo $G = (N, A)$, decimos que $S \subseteq N$ es un clique si para cada $a, b \in S$ se tiene que $(a, b) \in A$

Sea #CLIQUE una función que, dado un grafo G, retorna el número de cliques de G

Contando el número de cliques

Dado un grafo $G = (N, A)$, decimos que $S \subseteq N$ es un clique si para cada $a, b \in S$ se tiene que $(a, b) \in A$

Sea #CLIQUE una función que, dado un grafo G, retorna el número de cliques de G

Teorema

Si existe un FPRAS para #CLIQUE, entonces NP $\subseteq$ BPP

No existe un FPRAS para #CLIQUE: demostración

Dado un grafo $G = (N, A)$, defina $\overline{G} = (N, \overline{A})$ con $\overline{A} = (N \times N) \setminus A$

No existe un FPRAS para #CLIQUE: demostración

Dado un grafo $G = (N, A)$, defina $\overline{G} = (N, \overline{A})$ con $\overline{A} = (N \times N) \setminus A$

Tenemos que $\#\text{IS}(G) = \#\text{CLIQUE}(\overline{G})$

No existe un FPRAS para #CLIQUE: demostración

Dado un grafo $G = (N, A)$, defina $\overline{G} = (N, \overline{A})$ con $\overline{A} = (N \times N) \setminus A$

Tenemos que $\#\text{IS}(G) = \#\text{CLIQUE}(\overline{G})$

Concluimos que $\#\text{IS} \leq^{p}_{par} \#\text{CLIQUE}$

- Por lo tanto, si existe un FPRAS para #CLIQUE, entonces existe un FPRAS para #IS y NP $\subseteq$ BPP $\square$

Otro ejemplo: las cláusulas de Horn

Recuerde que una cláusula se dice de Horn si contiene a lo más un literal positivo.

Ejemplo

$(p \vee \neg q \vee \neg r)$, p, $(\neg q \vee \neg r)$ y $\neg q$ son cláusulas de Horn, mientras que $(p \vee q)$ y $(p \vee \neg q \vee r \vee \neg s)$ no lo son.

Además, decimos que una fórmula proposicional φ es de Horn si φ es una conjunción de cláusulas de Horn.

La función #HORN-SAT

Sea #HORN-SAT una función que, dada una fórmula proposicional φ de Horn, retorna el número de valuaciones que satisfacen φ

La función #HORN-SAT

Sea #HORN-SAT una función que, dada una fórmula proposicional φ de Horn, retorna el número de valuaciones que satisfacen φ

Teorema

#HORN-SAT es #P-completo.

La función #HORN-SAT

Sea #HORN-SAT una función que, dada una fórmula proposicional φ de Horn, retorna el número de valuaciones que satisfacen φ

Teorema

#HORN-SAT es #P-completo.

Ejercicio

Demuestre que $L_{\#\text{HORN-SAT}} \in \text{PTIME}$

No existe un FPRAS para #HORN-SAT

No existe un FPRAS para #HORN-SAT

Teorema

Si existe un FPRAS para #HORN-SAT, entonces NP $\subseteq$ BPP

No existe un FPRAS para #HORN-SAT

Teorema

Si existe un FPRAS para #HORN-SAT, entonces NP $\subseteq$ BPP

Demostración: Sea $G = (N, A)$ un grafo tal que $N \neq \emptyset$

No existe un FPRAS para #HORN-SAT

Teorema

Si existe un FPRAS para #HORN-SAT, entonces NP $\subseteq$ BPP

Demostración: Sea $G = (N, A)$ un grafo tal que $N \neq \emptyset$

Por cada $v \in N$, considere una variable proposicional x_v, y defina φ_G como la siguiente fórmula proposicional:

$$\left(\bigwedge_{a \in N} (x_a \vee \neg x_a) \right) \wedge \left(\bigwedge_{(b,c) \in A} (\neg x_b \vee \neg x_c) \right)$$

No existe un FPRAS para #HORN-SAT: demostración

Tenemos que φ_G es una fórmula proposicional de Horn
y $\#\mathsf{IS}(G) = \#\text{HORN-SAT}(\varphi_G)$

- ¿Cómo se puede extraer un conjunto independiente de G desde una valuación que satisface φ_G?

No existe un FPRAS para #HORN-SAT: demostración

Tenemos que φ_G es una fórmula proposicional de Horn y $\#\text{IS}(G) = \#\text{HORN-SAT}(\varphi_G)$

- ¿Cómo se puede extraer un conjunto independiente de G desde una valuación que satisface φ_G?

Concluimos que $\#\text{IS} \leq^p_{par} \#\text{HORN-SAT}$

- ¿Cómo se maneja el caso en que $N = \emptyset$ en la reducción?

No existe un FPRAS para #HORN-SAT: demostración

Tenemos que φ_G es una fórmula proposicional de Horn y $\#\text{IS}(G) = \#\text{HORN-SAT}(\varphi_G)$

- ¿Cómo se puede extraer un conjunto independiente de G desde una valuación que satisface φ_G?

Concluimos que $\#\text{IS} \leq^p_{par} \#\text{HORN-SAT}$

- ¿Cómo se maneja el caso en que $N = \emptyset$ en la reducción?

Por lo tanto, si existe un FPRAS para #HORN-SAT, entonces existe un FPRAS para #IS y NP $\subseteq$ BPP $\square$