

Un FPRAS para #DNF-SAT: segundo intento

Recuerde que $\varphi = D_1 \vee \cdots \vee D_m$

- Donde cada D_i menciona ℓ_i literales, y no contiene literales repetidos ni complementarios

Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ sea $S_i = |\{\sigma \mid \sigma(D_i) = 1\}|$, y sea $M = \sum_{i=1}^m S_i$

- Tenemos que $S_i = 2^{n-\ell_i}$

Además, para cada valuación σ sea $d(\sigma) = |\{i \in \{1, \dots, m\} \mid \sigma(D_i) = 1\}|$

- Tenemos que $\sigma(\varphi) = 1$ si y sólo si $d(\sigma) \geq 1$

Un FPRAS para $\#$ DNF-SAT: segundo intento

Suponga que las asignaciones de valores de verdad σ para φ son escogidas de manera que:

$$\Pr(\sigma) = \frac{d(\sigma)}{M}$$

Nótese que esta probabilidad está bien definida puesto que $1 \leq M$ y $d(\sigma) \leq M$

Y considere la siguiente variable aleatoria:

$$Y(\sigma) = \begin{cases} \frac{M}{d(\sigma)} & \sigma(\varphi) = 1 \\ 0 & \sigma(\varphi) = 0 \end{cases}$$

Un FPRAS para #DNF-SAT: segundo intento

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Y] &= \sum_{\sigma} Y(\sigma) \cdot \mathbf{Pr}(\sigma) \\ &= \sum_{\sigma : \sigma(\varphi)=1} \frac{M}{d(\sigma)} \cdot \frac{d(\sigma)}{M} \\ &= \sum_{\sigma : \sigma(\varphi)=1} 1 \\ &= \#\text{DNF-SAT}(\varphi)\end{aligned}$$

Tenemos entonces que $\mathbf{E}[Y] = \#\text{DNF-SAT}(\varphi)$, el primer requisito que debemos cumplir

- ¿Cómo podemos muestrear Y en tiempo polinomial en el tamaño de φ ?

Muestreando Y en tiempo polinomial

Para obtener un valor de Y realizamos los siguientes pasos:

1. Escoja $i \in \{1, \dots, m\}$ con probabilidad $\frac{S_i}{M}$
2. Escoja σ tal que $\sigma(D_i) = 1$ con distribución uniforme
3. Retorne $Y(\sigma)$

¿Cómo se realiza el paso 1 en tiempo polinomial en el tamaño de φ ?

- ¿Por qué no se puede hacer algo similar y escoger directamente σ con probabilidad $\frac{d(\sigma)}{M}$?

Muestreando Y en tiempo polinomial

Nos falta calcular la probabilidad de escoger σ en los pasos 1 y 2

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbf{Pr}(\sigma) &= \sum_{i=1}^m \mathbf{Pr}(\sigma \mid D_i) \cdot \mathbf{Pr}(D_i) \\&= \sum_{i: \sigma(D_i)=1} \mathbf{Pr}(\sigma \mid D_i) \cdot \mathbf{Pr}(D_i) \\&= \sum_{i: \sigma(D_i)=1} \frac{1}{S_i} \cdot \frac{S_i}{M} \\&= \sum_{i: \sigma(D_i)=1} \frac{1}{M} \\&= \frac{1}{M} \cdot \sum_{i: \sigma(D_i)=1} 1 \\&= \frac{d(\sigma)}{M}\end{aligned}$$

Un FPRAS para $\#DNF\text{-SAT}$: segundo intento

Nos falta calcular $\mathbf{Var}[Y]$ para saber si podemos obtener un FPRAS.

- ▶ En lugar de hacer esto, vamos a acotar superiormente $\frac{\mathbf{Var}[Y]}{\mathbf{E}[Y]^2}$

Si $\sigma(\varphi) = 1$ tenemos que $\frac{M}{m} \leq Y(\sigma) \leq M$

- ▶ Por lo tanto $\frac{M}{m} \leq \mathbf{E}[Y] \leq M$

Concluimos que:

$$\frac{M}{m} - M \leq Y - \mathbf{E}[Y] \leq M - \frac{M}{m}$$

Un FPRAS para #DNF-SAT: segundo intento

Tenemos entonces que:

$$|Y - \mathbf{E}[Y]| \leq \frac{M}{m} \cdot (m - 1)$$

De lo cual se concluye que $(Y - \mathbf{E}[Y])^2 \leq \left(\frac{M}{m}\right)^2 \cdot (m - 1)^2$

► Por lo tanto $\mathbf{Var}[Y] \leq \left(\frac{M}{m}\right)^2 \cdot (m - 1)^2$

Como $\frac{M}{m} \leq \mathbf{E}[Y]$, sabemos que $\frac{1}{\mathbf{E}[Y]} \leq \frac{m}{M}$

Concluimos que: $\frac{\mathbf{Var}[Y]}{\mathbf{E}[Y]^2} \leq \left(\frac{m}{M}\right)^2 \cdot \left(\frac{M}{m}\right)^2 \cdot (m - 1)^2 = (m - 1)^2$

Un FPRAS para #DNF-SAT: primer intento

Realizando k muestras independientes de Y obtenemos entonces:

$$\begin{aligned}\Pr\left(\left|\frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k Y_i - \mathbf{E}[Y]\right| \geq \varepsilon \cdot \mathbf{E}[Y]\right) &\leq \frac{\mathbf{Var}[Y]}{k \cdot \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Y]^2} \\ &\leq \frac{(m-1)^2}{k \cdot \varepsilon^2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, para obtener $\Pr(|\frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k Y_i - \mathbf{E}[Y]| \geq \varepsilon \cdot \mathbf{E}[Y]) \leq \frac{1}{4}$ imponemos la siguiente restricción sobre k :

$$\frac{4 \cdot (m-1)^2}{\varepsilon^2} \leq k$$

Un FPRAS para #DNF-SAT: primer intento

Tomando entonces:

$$k = \left\lceil \frac{4 \cdot (m-1)^2}{\varepsilon^2} \right\rceil$$

obtenemos la cota superior deseada para la probabilidad de error.

¡El algoritmo aleatorizado resultante funciona en tiempo polinomial en el tamaño de φ y $\frac{1}{\varepsilon}$!

- ▶ Debemos realizar k muestras independientes de Y , donde k depende polinomialmente de m y $\frac{1}{\varepsilon}$
- ▶ Cada una de las muestras puede ser obtenida en tiempo polinomial en el tamaño de φ