

Una primera propiedad fundamental: irreducibilidad

Sea $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov con conjunto de estados Ω y matriz de transición P

Definición

$\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ es irreducible si G_P es un grafo fuertemente conexo.

Tenemos que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ es irreducible si y sólo si para cada $a, b \in \Omega$, existe $t > 0$ tal que:

$$\Pr(X_t = a \mid X_0 = b) > 0$$

Una segunda propiedad fundamental: aperiodicidad

Sea $a \in \Omega$. Si $\{n > 0 \mid \mathbf{Pr}(X_n = a \mid X_0 = a) > 0\}$ no es vacío, entonces el periodo de a es definido como:

$$\text{MCD} \{n > 0 \mid \mathbf{Pr}(X_n = a \mid X_0 = a) > 0\}$$

En caso contrario, el periodo de a no está definido.

Definición

Un estado $a \in \Omega$ es aperiódico si su periodo está definido y es igual a 1. Además, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ es aperiódica si cada estado $b \in \Omega$ es aperiódico.

Irreducibilidad y aperiodicidad: algunos ejemplos

Ejercicios

1. Muestre que la cadena de Markov definida para la relación R_{KS} es irreducible y aperiódica.
2. Demuestre que en una cadena de Markov irreducible todos los estados tienen el mismo periodo.
 - Concluimos entonces que si una cadena de Markov irreducible tiene un estado aperiódico, entonces la cadena es aperiódica.

Una solución para el segundo ejercicio

Sea $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov irreducible con conjunto de estados Ω y matriz de transición P , y sean $b, c \in \Omega$

Suponemos que los periodos de b y c son ℓ_b y ℓ_c , respectivamente.

- ¿Por qué sabemos que estos periodos existen?

Dado que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ es una cadena de Markov irreducible:

- Existe un camino en G_P desde b a c de largo $k_{b,c}$, y existe un camino en G_P desde c a b de largo $k_{c,b}$

Una solución para el segundo ejercicio

Entonces existe un camino de b a b de largo $k_{b,c} + k_{c,b}$, de lo cual concluimos que $\Pr(X_{k_{b,c}+k_{c,b}} = b \mid X_0 = b) > 0$

- ▶ Dado que ℓ_b es el periodo de b , concluimos que $\ell_b \mid (k_{b,c} + k_{c,b})$

Sea $n > 0$ tal que $\Pr(X_n = c \mid X_0 = c) > 0$

- ▶ Existe un camino en G_P de c a c de largo n

Tenemos entonces que existe un camino en G_P de b a b de largo $k_{b,c} + n + k_{c,b}$, por lo que $\Pr(X_{k_{b,c}+n+k_{c,b}} = b \mid X_0 = b) > 0$

- ▶ Dado que ℓ_b es el periodo de b , concluimos que $\ell_b \mid (k_{b,c} + n + k_{c,b})$
- ▶ Así, dado que $\ell_b \mid (k_{b,c} + k_{c,b})$, deducimos que $\ell_b \mid n$

Una solución para el segundo ejercicio

Por lo tanto, $\ell_b \mid n$ para cada $n > 0$ tal que $\mathbf{Pr}(X_n = c \mid X_0 = c) > 0$

- De lo cual deducimos que $\ell_b \leq \ell_c$, puesto que
 $\ell_c = \text{MCD} \{n > 0 \mid \mathbf{Pr}(X_n = c \mid X_0 = c) > 0\}$

De la misma forma se puede demostrar que $\ell_c \leq \ell_b$, de lo cual concluimos que $\ell_b = \ell_c$



Existencia de un límite: irreducibilidad y aperiodicidad

Sea $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov irreducible y aperiódica con conjunto de estados Ω

Teorema

Si $a \in \Omega$, se tiene que:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Pr}(X_n = a \mid X_0 = b)$ existe para cada $b \in \Omega$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Pr}(X_n = a \mid X_0 = b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Pr}(X_n = a \mid X_0 = c)$ para cada $b, c \in \Omega$

Existencia de un límite: irreducibilidad y aperiodicidad

Dado $a \in \Omega$, definimos:

$$\lambda_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(X_n = a \mid X_0 = b),$$

donde b es un elemento arbitrario en Ω

Lema

Si existe $a \in \Omega$ tal que $\lambda_a = 0$, entonces $\lambda_b = 0$ para todo $b \in \Omega$

Ejercicio

Demuestre el lema.

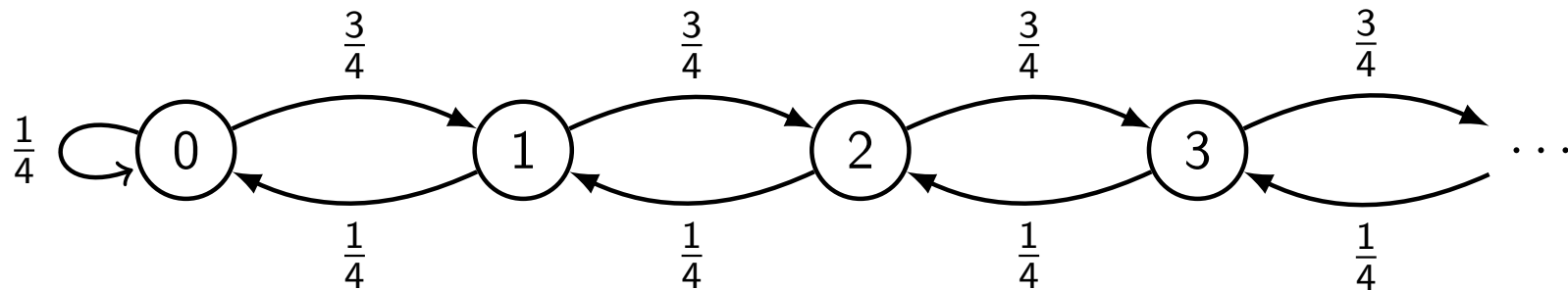
Irreducibilidad y aperiodicidad: un par de ejemplos

Ejercicios

1. Construya una cadena de Markov irreducible, aperiódica y tal que $\lambda_a = 0$ para todo estado a
2. Construya una cadena de Markov irreducible, aperiódica y tal que $\lambda_b > 0$ para todo estado b

Una solución al primer problema

Considere la siguiente cadena de Markov con conjunto de estado $\Omega = \mathbb{N}$:



Esta cadena de Markov es irreducible y aperiódica.

- Es fácil ver que el estado 0 es aperiódico, de lo cual se concluye que la cadena de Markov es aperiódica dado que es irreducible

Una solución al primer problema

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\Pr(X_{n+1} = 0 \mid X_0 = 0) &= \Pr(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) \cdot \Pr(X_n = 0 \mid X_0 = 0) + \\ &\quad \Pr(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) \cdot \Pr(X_n = 1 \mid X_0 = 0) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \Pr(X_n = 0 \mid X_0 = 0) + \frac{1}{4} \cdot \Pr(X_n = 1 \mid X_0 = 0)\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito obtenemos:

$$\lambda_0 = \frac{1}{4} \cdot \lambda_0 + \frac{1}{4} \cdot \lambda_1$$

Por lo tanto: $3 \cdot \lambda_0 = \lambda_1$

Una solución al primer problema

Considere $i > 0$ y suponga que $3 \cdot \lambda_{i-1} = \lambda_i$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \Pr(X_{n+1} = i \mid X_0 = i) &= \Pr(X_{n+1} = i \mid X_n = i-1) \cdot \Pr(X_n = i-1 \mid X_0 = i) + \\ &\quad \Pr(X_{n+1} = i \mid X_n = i+1) \cdot \Pr(X_n = i+1 \mid X_0 = i) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \Pr(X_n = i-1 \mid X_0 = i) + \frac{1}{4} \cdot \Pr(X_n = i+1 \mid X_0 = i) \end{aligned}$$

Una solución al primer problema

Tomando el límite cuando n tiende a infinito obtenemos:

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \frac{3}{4} \cdot \lambda_{i-1} + \frac{1}{4} \cdot \lambda_{i+1} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \lambda_i + \frac{1}{4} \cdot \lambda_{i+1} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \lambda_i + \frac{1}{4} \cdot \lambda_{i+1}\end{aligned}$$

Por lo tanto: $3 \cdot \lambda_i = \lambda_{i+1}$

Una solución al primer problema

Concluimos que $\lambda_i = 3^i \cdot \lambda_0$ para cada $i \in \mathbb{N}$

Así, dado que $\lambda_i \leq 1$ para cada $i \in \mathbb{N}$, se debe tener que $\lambda_0 = 0$

► Del lema concluimos entonces que $\lambda_i = 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$



Irreducibilidad, aperiodicidad y el caso finito

Sea $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov irreducible, aperiódica y con conjunto de estados Ω finito

Lema

$$\sum_{a \in \Omega} \lambda_a = 1$$

Demostración: fije un elemento $b \in \Omega$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$\sum_{a \in \Omega} \Pr(X_n = a \mid X_0 = b) = 1$$

Irreducibilidad, aperiodicidad y el caso finito

Por lo tanto tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{a \in \Omega} \Pr(X_n = a \mid X_0 = b) \right) = 1$$

Además, sabemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{a \in \Omega} \Pr(X_n = a \mid X_0 = b) \right) &= \sum_{a \in \Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(X_n = a \mid X_0 = b) \\ &= \sum_{a \in \Omega} \lambda_a \end{aligned}$$

Concluimos que $\sum_{a \in \Omega} \lambda_a = 1$



Irreducibilidad, aperiodicidad y el caso finito

¿Por qué la demostración anterior no es válida si Ω es un conjunto infinito enumerable?

- ▶ ¿Qué paso de la demostración no funciona?

Como consecuencia de los resultados anteriores obtenemos:

Corolario

Si $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ es una cadena de Markov irreducible, aperiódica y con un conjunto de estados Ω finito, entonces $\lambda_a > 0$ para cada $a \in \Omega$

Existencia y unicidad de la distribución estacionaria: el caso finito

Sea $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov irreducible, aperiódica, con conjunto de estados Ω finito y matriz de transición P

- Y sea $\vec{\pi} \in [0, 1]^{|\Omega|}$ un vector tal que $\vec{\pi}[a] = \lambda_a$ para cada $a \in \Omega$

Teorema

$\vec{\pi}$ es la única distribución estacionaria para $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$

Demostración: Primero tenemos que demostrar que $P\vec{\pi} = \vec{\pi}$

- Vale decir, tenemos que demostrar que $(P\vec{\pi})[a] = \vec{\pi}[a]$ para cada $a \in \Omega$

Existencia y unicidad en el caso finito: demostración

Dado $a \in \Omega$ y un estado arbitrario $c \in \Omega$, tenemos que:

$$\begin{aligned}(P\vec{\pi})[a] &= \sum_{b \in \Omega} P[a, b] \cdot \vec{\pi}[b] \\&= \sum_{b \in \Omega} \left(\Pr(X_1 = a \mid X_0 = b) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(X_n = b \mid X_0 = c) \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{b \in \Omega} \left(\Pr(X_1 = a \mid X_0 = b) \cdot \Pr(X_n = b \mid X_0 = c) \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{b \in \Omega} \left(\Pr(X_{n+1} = a \mid X_n = b) \cdot \Pr(X_n = b \mid X_0 = c) \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(X_{n+1} = a \mid X_0 = c) \\&= \lim_{m \rightarrow \infty} \Pr(X_m = a \mid X_0 = c) \\&= \lambda_a = \vec{\pi}[a]\end{aligned}$$

Existencia y unicidad en el caso finito: demostración

En segundo lugar, tenemos que demostrar que para toda distribución estacionaria $\vec{\alpha}$ para $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, se tiene que $\vec{\alpha} = \vec{\pi}$

Suponga que $P\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$. Dado $a \in \Omega$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}[a] &= (P\vec{\alpha})[a] \\ &= \sum_{b \in \Omega} P[a, b] \cdot \vec{\alpha}[b] \\ &= \sum_{b \in \Omega} P[a, b] \cdot (P\vec{\alpha})[b] \\ &= \sum_{b \in \Omega} P[a, b] \cdot \left(\sum_{c \in \Omega} P[b, c] \cdot \vec{\alpha}[c] \right) \\ &= \sum_{b \in \Omega} \sum_{c \in \Omega} P[a, b] \cdot P[b, c] \cdot \vec{\alpha}[c] \\ &= \sum_{c \in \Omega} \left(\sum_{b \in \Omega} P[a, b] \cdot P[b, c] \right) \cdot \vec{\alpha}[c]\end{aligned}$$

Existencia y unicidad en el caso finito: demostración

$$\begin{aligned} &= \sum_{c \in \Omega} P^2[a, c] \cdot \vec{\alpha}[c] \\ &= \sum_{c \in \Omega} P^2[a, c] \cdot (P\vec{\alpha})[c] \\ &= \sum_{c \in \Omega} P^2[a, c] \cdot \left(\sum_{d \in \Omega} P[c, d] \cdot \vec{\alpha}[d] \right) \\ &= \sum_{c \in \Omega} \sum_{d \in \Omega} P^2[a, c] \cdot P[c, d] \cdot \vec{\alpha}[d] \\ &= \sum_{d \in \Omega} \left(\sum_{c \in \Omega} P^2[a, c] \cdot P[c, d] \right) \cdot \vec{\alpha}[d] \\ &= \sum_{d \in \Omega} P^3[a, d] \cdot \vec{\alpha}[d] \end{aligned}$$

Existencia y unicidad en el caso finito: demostración

Siguiendo con este proceso, concluimos que para todo $n \geq 1$:

$$\vec{\alpha}[a] = \sum_{b \in \Omega} P^n[a, b] \cdot \vec{\alpha}[b]$$

Por lo tanto:

$$\vec{\alpha}[a] = \sum_{b \in \Omega} \mathbf{Pr}(X_n = a \mid X_0 = b) \cdot \vec{\alpha}[b]$$

Existencia y unicidad en el caso finito: demostración

Tomando el límite cuando n tiende a infinito obtenemos:

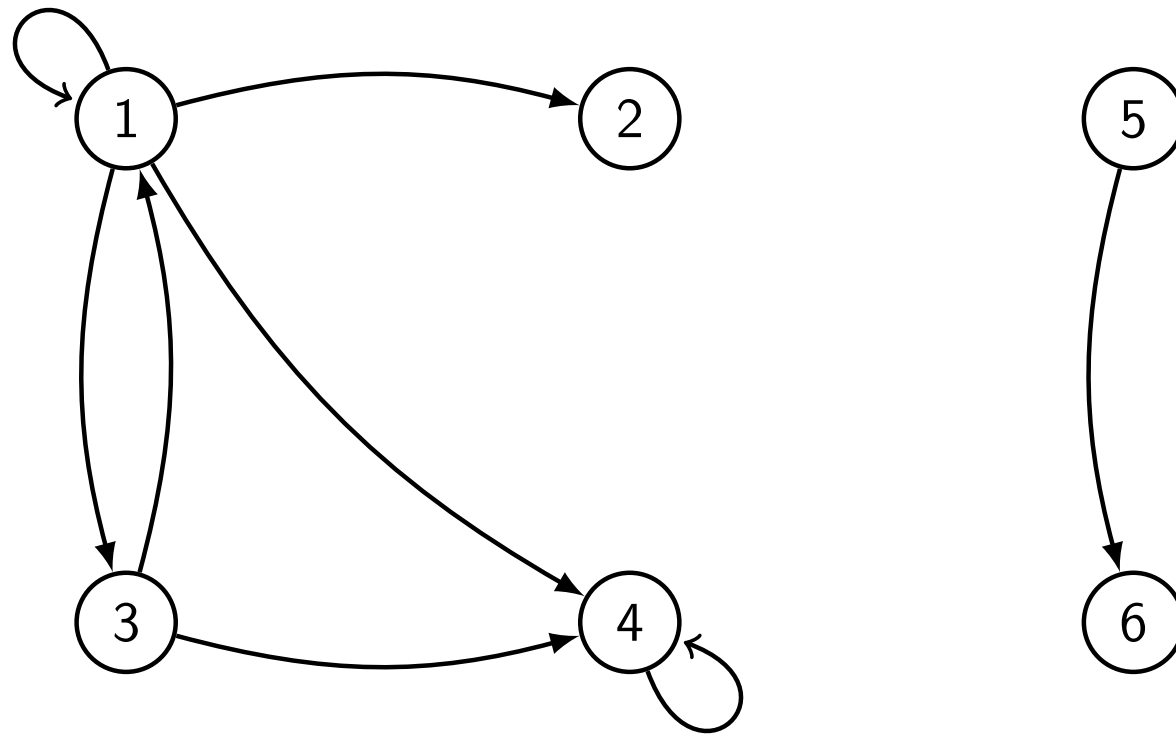
$$\begin{aligned}\vec{\alpha}[a] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{b \in \Omega} \mathbf{Pr}(X_n = a \mid X_0 = b) \cdot \vec{\alpha}[b] \right) \\ &= \sum_{b \in \Omega} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Pr}(X_n = a \mid X_0 = b) \right) \cdot \vec{\alpha}[b] \\ &= \sum_{b \in \Omega} \lambda_a \cdot \vec{\alpha}[b] \\ &= \lambda_a \cdot \sum_{b \in \Omega} \vec{\alpha}[b] \\ &= \lambda_a \cdot 1 = \lambda_a = \vec{\pi}[a]\end{aligned}$$

Concluimos que $\vec{\alpha} = \vec{\pi}$, puesto que $\vec{\alpha}[a] = \vec{\pi}[a]$ para todo $a \in \Omega$



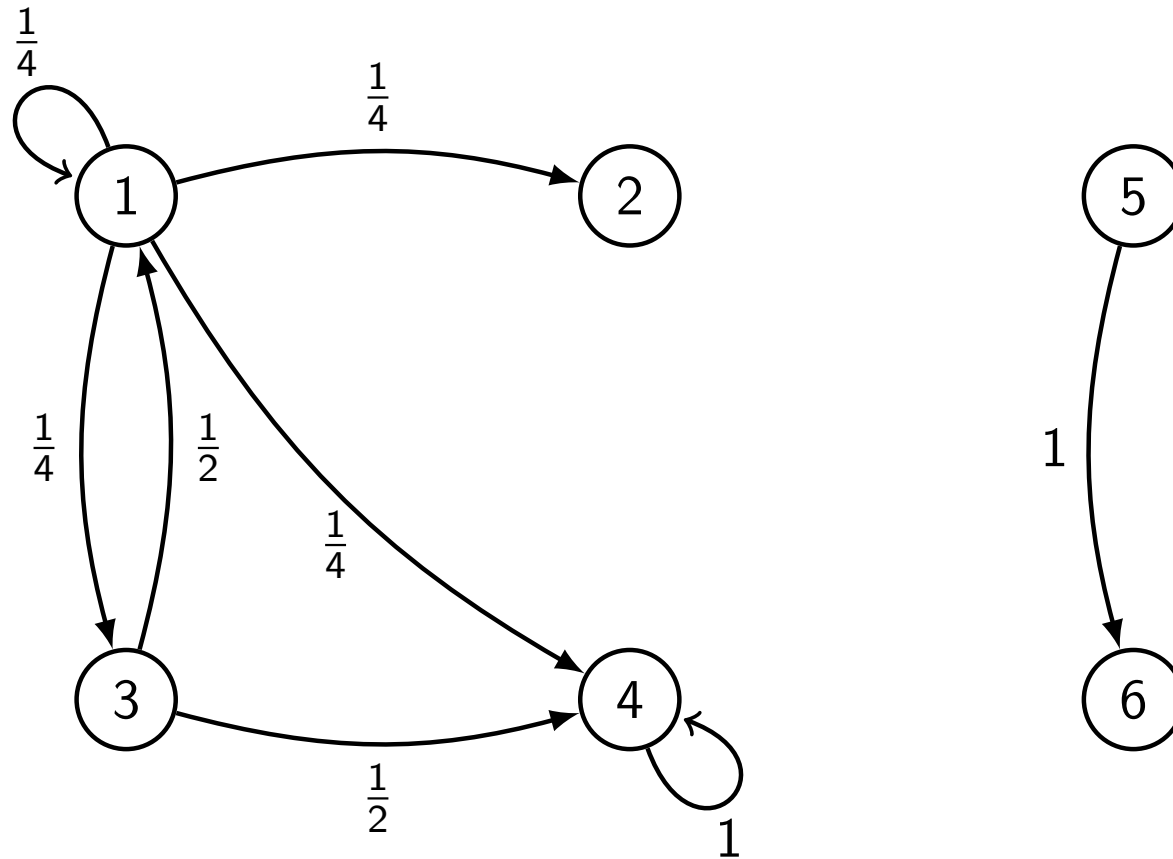
Un ejemplo importante: PageRank

La estructura de links en una pequeña Web:



Un ejemplo importante: PageRank

La estructura de links vista como una caminata aleatoria:



Un ejemplo importante: PageRank

Podemos representar la caminata aleatoria como una matriz P

- $P[i, j]$ es la probabilidad de ir de la página j a la página i

La matriz P de nuestro ejemplo:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un ejemplo importante: PageRank

El ranking de una página i se define como la probabilidad x_i de que el caminante aleatorio llegue a i

- ▶ ¿Qué características de la Web influyen en el valor x_i ?

En el ejemplo tenemos que:

$$x_i = \sum_{j=1}^6 P[i, j] \cdot x_j$$

Así, si $\vec{x}$ es un vector tal que $\vec{x}[i] = x_i$ para cada $i \in \{1, \dots, 6\}$, entonces:

$$P\vec{x} = \vec{x}$$

PageRank como una cadena de Markov

El proceso anterior se puede generalizar para la Web real.

- Suponemos que la Web tiene N páginas, por lo que P es una matriz de $N \times N$

Además, definimos $\vec{\pi}$ como un vector tal que $\vec{\pi}[i]$ es la probabilidad de que el caminante aleatorio llegue a la página i , para cada $i \in \{1, \dots, N\}$

PageRank como una cadena de Markov

P puede ser considerada como la matriz de transición de una cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ con conjunto de estados $\Omega = \{1, \dots, N\}$

► El vector $\vec{\pi}$ es entonces una distribución estacionaria de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$

¿Cómo podemos asegurar que $\vec{\pi}$ existe y es único? ¿Cómo podemos calcular $\vec{\pi}$?

¡Irreducibilidad y aperiodicidad son las propiedades que necesitamos!

► Dado que el conjunto de estados de la cadena de Markov es finito

Irreducibilidad, aperiodicidad y PageRank

Dos preguntas por responder:

- ▶ ¿Podemos asegurar que la cadena de Markov dada por P es irreducible? No
- ▶ ¿Podemos asegurar que la cadena de Markov dada por P es aperiódica? No

¿Cómo solucionamos estos problemas?

Irreducibilidad, aperiodicidad y PageRank

Para solucionar los problemas suponemos que el caminante aleatorio también puede decidir moverse a cualquier página sin considerar la estructura de la Web.

- Esto es controlado por un parámetro α

Sea U una matriz de $N \times N$ tal que $U[i, j] = \frac{1}{N}$, y sea $\alpha \in (0, 1)$

Definimos una matriz W_α de $N \times N$ como:

$$W_\alpha = \alpha \cdot P + (1 - \alpha) \cdot U$$

Irreducibilidad, aperiodicidad y PageRank

Con probabilidad α el caminante utiliza los links para moverse, y con probabilidad $(1 - \alpha)$ se mueve a cualquier página (sin considerar la estructura de la Web).

- ▶ Cuanto más grande es α , más consideramos la estructura de la Web

Tenemos que W_α define una cadena de Markov irreducible y aperiódica.

La definición y cálculo de PageRank

Consideramos un valor fijo de α

- ▶ En el artículo inicial sobre PageRank se consideraba $\alpha = 0.85$

Definimos entonces $\vec{\pi}$ como la distribución estacionaria de la cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ cuya matriz de transición es W_α

- ▶ Esta distribución existe y es única porque la cadena de Markov es irreducible, aperiódica y tiene un conjunto finito de estados

La definición y cálculo de PageRank

Para cada página i , calculamos $\vec{\pi}[i]$ utilizando la igualdad:

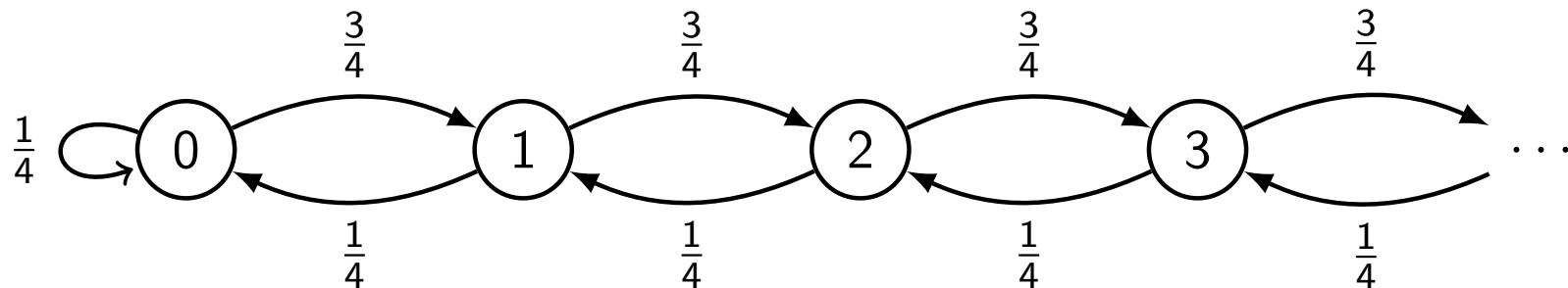
$$\vec{\pi}[i] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Pr}(X_n = i \mid X_0 = 1)$$

Vale decir, la caminata comienza en la página 1 (una página arbitraria), y el valor $\vec{\pi}[i]$ se calcula utilizando un valor de n suficientemente grande.

- Obtenemos una aproximación del valor de $\vec{\pi}[i]$, pero que en la práctica es suficientemente buena

Un último comentario: el caso infinito

Considere nuevamente la siguiente cadena de Markov con conjunto de estados $\Omega = \mathbb{N}$:



Demostramos que para esta cadena de Markov se tiene que $\lambda_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$

- Queremos definir una condición que nos asegure que los valores λ_i forman una distribución estacionaria para la cadena de Markov

Una tercera propiedad fundamental: recurrencia

Sea $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov con conjunto de estados Ω

- Y sea $b \in \Omega$

Definimos T_b como una variable aleatoria que registra el primer instante de tiempo mayor a 0 en que llegamos a b , suponiendo que en el tiempo 0 estábamos en b

- Vale decir, si el valor de T_a es n , con $n \geq 1$, entonces $X_0 = b$, $X_1 \neq b, \dots, X_{n-1} \neq b$ y $X_n = b$

Este tiempo de retorno a b es llamado *hitting time*

Una tercera propiedad fundamental: recurrencia

Definition

Sea $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov con conjunto de estados Ω , y sea $b \in \Omega$

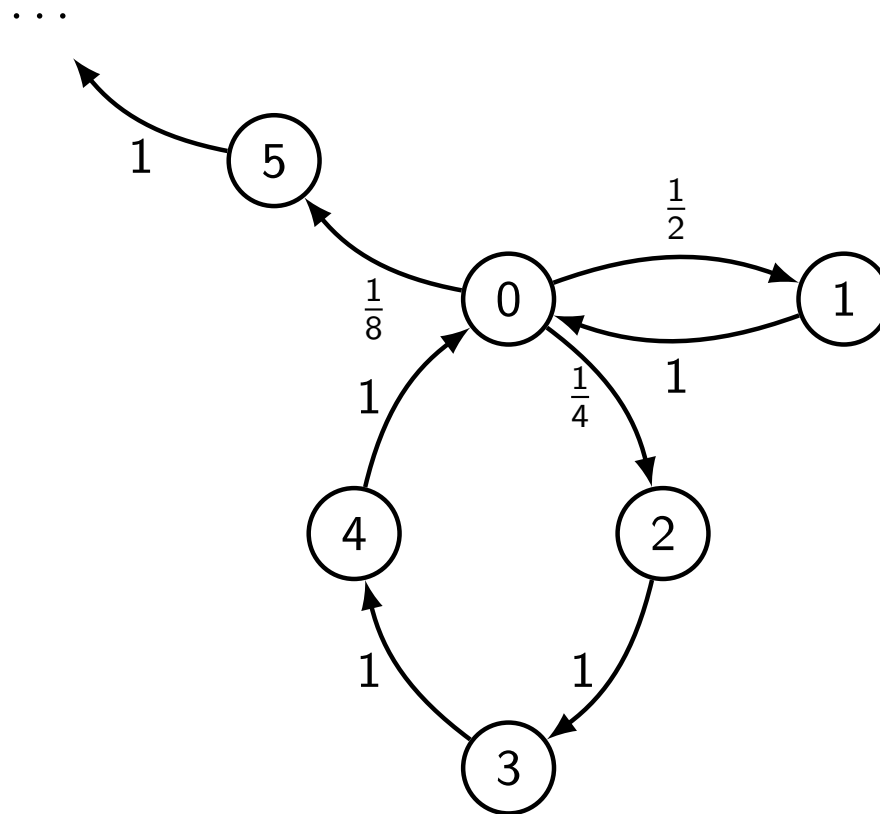
1. b es recurrente si $\sum_{n \geq 1} \mathbf{Pr}(T_b = n) = 1$
2. b es recurrente positivo si b es recurrente y $\mathbf{E}[T_b] \in \mathbb{R}^+$

Ejercicio

De una cadena de Markov $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ con conjunto de estados Ω y un estado $b \in \Omega$ tal que b es recurrente pero no recurrente positivo.

Una solución para el ejercicio

Considere la siguiente cadena de Markov con conjunto de estados $\Omega = \mathbb{N}$:



Tenemos que 0 es un estado recurrente pero no recurrente positivo.

Existencia y unicidad de la distribución estacionaria: el caso general

Sea $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov irreducible, aperiódica y **donde cada estado es recurrente positivo**

- ▶ Y sea $\vec{\pi} \in [0, 1]^{|\Omega|}$ un vector tal que $\vec{\pi}[a] = \lambda_a$ para cada $a \in \Omega$, donde Ω es el conjunto de estados de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$
 - ▶ Nótese que Ω puede ser un conjunto infinito enumerable

Teorema

$\vec{\pi}$ es la única distribución estacionaria para $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$