

Una herramienta fundamental

Teorema

Sea R una p -relación auto-reducible. Si existe un FPAUG para R , entonces existe un FPRAS para R .

La idea de la demostración

Vamos a explicar la idea de la demostración utilizando un problema de conteo relacionado al problema de la mochila.

- Realizamos algunas simplificaciones para concentrarnos en lo fundamental

Utilizamos $\cdot$ para denotar el producto interior usual en $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$)

Considere el siguiente problema:

$$\text{KS} = \{(\vec{a}, b) \mid \vec{a} \in \mathbb{N}^n \text{ para } n \geq 1, \\ b \in \mathbb{Z} \text{ y existe } \vec{x} \in \{0, 1\}^n \text{ tal que } \vec{a} \cdot \vec{x} \leq b\}$$

KS es una versión simplificada del problema de la mochila, de hecho tenemos que $\text{KS} \in \text{PTIME}$

KS como una relación y el problema de conteo asociado

Ejercicio

Podemos representar KS como la siguiente relación:

$$R_{KS} = \{((\vec{a}, b), \vec{x}) \mid \vec{a} \in \mathbb{N}^n \text{ y } \vec{x} \in \{0, 1\}^n \text{ para } n \geq 1, b \in \mathbb{Z} \text{ y } \vec{a} \cdot \vec{x} \leq b\}$$

Demuestre que R_{KS} es auto-reducible.

Definimos la función de conteo $\#KS$ como $\#KS(\vec{a}, b) = N_{R_{KS}}((\vec{a}, b))$

- Suponiendo que $\vec{a} \in \mathbb{N}^n$, tenemos que $\#KS(\vec{a}, b)$ es el número de vectores $\vec{x} \in \{0, 1\}^n$ tales que $\vec{a} \cdot \vec{x} \leq b$

La idea de la demostración para KS

Sea $(\vec{a}, b)$ una entrada de $\#KS$

- ▶ Suponemos que $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ con $0 < a_1 \leq \dots \leq a_n$ y $b \geq 0$
 - ▶ ¿Por qué podemos suponer esto?

Definimos $b_0 = 0$ y para cada $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$b_i = \min \left\{ \sum_{j=1}^i a_j, b \right\}$$

Es importante notar que:

$$\begin{aligned} \#KS(\vec{a}, b_0) &= 1 \\ \#KS(\vec{a}, b_i) &\leq \#KS(\vec{a}, b_{i+1}) \quad \text{para todo } i \in \{0, \dots, n-1\} \\ \#KS(\vec{a}, b_n) &= \#KS(\vec{a}, b) \end{aligned}$$

La idea de la demostración para KS

La demostración se basa en la igualdad:

$$\begin{aligned} \#KS(\vec{a}, b) = \#KS(\vec{a}, b_n) &= \frac{\#KS(\vec{a}, b_n)}{\#KS(\vec{a}, b_{n-1})} \cdot \frac{\#KS(\vec{a}, b_{n-1})}{\#KS(\vec{a}, b_{n-2})} \cdot \dots \\ &\quad \frac{\#KS(\vec{a}, b_1)}{\#KS(\vec{a}, b_0)} \cdot \#KS(\vec{a}, b_0) \end{aligned}$$

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ definimos:

$$\rho_i = \frac{\#KS(\vec{a}, b_{i-1})}{\#KS(\vec{a}, b_i)}$$

La idea de la demostración para KS

Tenemos que $0 < \rho_i \leq 1$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$

Considerando que $\#KS(\vec{a}, b_0) = 1$, concluimos que:

$$\frac{1}{\#KS(\vec{a}, b)} = \prod_{i=1}^n \rho_i$$

Por lo tanto, si logramos tener buenas estimaciones de cada ρ_i podemos obtener una buena estimación de $\frac{1}{\#KS(\vec{a}, b)}$

► Y de esta forma de $\#KS(\vec{a}, b)$

Estimando ρ_i

Sea X_i una variable aleatoria que toma valor 1 con probabilidad ρ_i , y 0 con probabilidad $1 - \rho_i$

Tenemos que $\mathbf{E}[X_i] = \rho_i$, por lo que podemos estimar ρ_i a través del muestreo de X_i

- ▶ Realizamos $t \geq 1$ nuestras independientes $Y_{i,1}, \dots, Y_{i,t}$ de X_i , y utilizamos como estimador el promedio $\bar{Y}_i = (\frac{1}{t} \cdot \sum_{j=1}^t Y_{i,j})$
- ▶ Puesto que $\mathbf{E}[\bar{Y}_i] = \rho_i$ y tiene una menor varianza

¿Pero como podemos muestrear X_i ?

Estimando ρ_i

En este punto necesitamos suponer que tenemos un generador uniforme para R_{KS}

- ▶ Si este generador funciona en tiempo polinomial entonces vamos a obtener un FPRAS para $\#KS$
- ▶ En la demostración del teorema la hipótesis será que existe un FPAUG para la relación que estemos considerando

Sea $\mathcal{G}$ el generador uniforme que necesitamos. Para cada entrada $(\vec{c}, d)$ de KS con $\vec{c} \in \mathbb{N}^m$, y cada vector $\vec{y} \in \mathbb{N}^m$ tenemos:

- ▶ si $\vec{c} \cdot \vec{y} > d$, entonces $\mathbf{Pr}(\mathcal{G}(\vec{c}, d) = \vec{y}) = 0$
- ▶ si $\vec{c} \cdot \vec{y} \leq d$, entonces $\mathbf{Pr}(\mathcal{G}(\vec{c}, d) = \vec{y}) = \frac{1}{\#KS(\vec{c}, d)}$

Estimando ρ_i

Para estimar $\rho_i = \frac{\#KS(\vec{a}, b_{i-1})}{\#KS(\vec{a}, b_i)}$ utilizamos el siguiente algoritmo:

```
 $fav := 0$   
for  $j := 1$  to  $t$  do  
     $\vec{v} = \mathcal{G}(\vec{a}, b_i)$   
    if  $\vec{a} \cdot \vec{v} \leq b_{i-1}$  then  
         $fav := fav + 1$   
return  $\frac{fav}{t}$ 
```

¿Qué tan buena es la estimación de ρ_i ? ¿Que tan buena es la estimación de $\frac{1}{\#KS(\vec{a}, b)}$ dadas las estimaciones de $\rho_1, \dots, \rho_n$?

- Tenemos que acotar la probabilidad de error

La probabilidad de error

$$\text{Sea } Z = \prod_{i=1}^n \overline{Y}_i$$

Y sea $0 < \varepsilon < 1$

- Nos concentramos en el caso interesante en que esperamos que el error sea arbitrariamente pequeño

Para obtener un FPRAS para $\#KS$, primero tenemos que acotar superiormente la siguiente probabilidad:

$$\Pr\left(\left|Z - \frac{1}{\#KS(\vec{a}, b)}\right| \geq \varepsilon \cdot \frac{1}{\#KS(\vec{a}, b)}\right)$$

La probabilidad de error

Dado que $\overline{Y}_i$ es independiente de $\overline{Y}_j$ para $i \neq j$; tenemos que:

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^n \overline{Y}_i\right] = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}[\overline{Y}_i] = \prod_{i=1}^n \rho_i = \frac{1}{\#KS(\vec{a}, b)}$$

Usando entonces la desigualdad de Chebyshev obtenemos:

$$\begin{aligned} \Pr\left(\left|Z - \frac{1}{\#KS(\vec{a}, b)}\right| \geq \varepsilon \cdot \frac{1}{\#KS(\vec{a}, b)}\right) &= \Pr(|Z - \mathbf{E}[Z]| \geq \varepsilon \cdot \mathbf{E}[Z]) \\ &\leq \frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2} \end{aligned}$$

La probabilidad de error

Pero tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\mathbf{Var}[Z]}{\mathbf{E}[Z]^2} \\&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\mathbf{E}[Z^2] - \mathbf{E}[Z]^2}{\mathbf{E}[Z]^2} \right) \\&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\mathbf{E}[Z^2]}{\mathbf{E}[Z]^2} - 1 \right) \\&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\mathbf{E}[(\prod_{i=1}^n \overline{Y}_i)^2]}{(\prod_{i=1}^n \mathbf{E}[\overline{Y}_i])^2} - 1 \right) \\&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\mathbf{E}[\prod_{i=1}^n \overline{Y}_i^2]}{\prod_{i=1}^n \mathbf{E}[\overline{Y}_i]^2} - 1 \right) \\&= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\prod_{i=1}^n \mathbf{E}[\overline{Y}_i^2]}{\prod_{i=1}^n \mathbf{E}[\overline{Y}_i]^2} - 1 \right)\end{aligned}$$

La probabilidad de error

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^n \frac{\mathbf{E}[\bar{Y}_i^2]}{\mathbf{E}[\bar{Y}_i]^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^n \frac{(\mathbf{Var}[\bar{Y}_i] + \mathbf{E}[\bar{Y}_i]^2)}{\mathbf{E}[\bar{Y}_i]^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^n \left[1 + \frac{\mathbf{Var}[\bar{Y}_i]}{\mathbf{E}[\bar{Y}_i]^2} \right] - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^n \left[1 + \frac{\mathbf{Var}[\bar{Y}_i]}{\rho_i^2} \right] - 1 \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto necesitamos acotar superiormente $\frac{\mathbf{Var}[\bar{Y}_i]}{\rho_i^2}$

Acotando superiormente $\frac{\text{Var}[\bar{Y}_i]}{\rho_i^2}$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\text{Var}[\bar{Y}_i]}{\rho_i^2} &= \frac{\text{Var}\left[\frac{1}{t} \sum_{j=1}^t Y_{i,j}\right]}{\rho_i^2} \\&= \frac{\frac{1}{t^2} \cdot \text{Var}\left[\sum_{j=1}^t Y_{i,j}\right]}{\rho_i^2} \\&= \frac{\frac{1}{t^2} \cdot \sum_{j=1}^t \text{Var}[Y_{i,j}]}{\rho_i^2} \\&= \frac{\frac{1}{t^2} \cdot \sum_{j=1}^t \rho_i \cdot (1 - \rho_i)}{\rho_i^2} \\&= \frac{\frac{1}{t^2} \cdot t \cdot \rho_i \cdot (1 - \rho_i)}{\rho_i^2} \\&= \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{1}{\rho_i} - 1 \right)\end{aligned}$$

Acotando superiormente $\frac{\text{Var}[\overline{Y_i}]}{\rho_i^2}$

Lema

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que:

$$\#KS(\vec{a}, b_{i-1}) \leq \#KS(\vec{a}, b_i) \leq (n+1) \cdot \#KS(\vec{a}, b_{i-1})$$

Ejercicios

1. Sea $\vec{x} \in \{0, 1\}^n$ tal que $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\vec{a} \cdot \vec{x} \leq b_i$. Demuestre que si $\vec{a} \cdot \vec{x} > b_{i-1}$, entonces existe una posición $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_j = 1$ y para el vector $\vec{y} = (x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n)$ se tiene que $\vec{a} \cdot \vec{y} \leq b_{i-1}$.
2. Demuestre que el lema es consecuencia de la propiedad anterior.

Acotando superiormente $\frac{\text{Var}[\overline{Y_i}]}{\rho_i^2}$

Del lema concluimos que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\frac{1}{\rho_i} = \frac{\#\text{KS}(\vec{a}, b_i)}{\#\text{KS}(\vec{a}, b_{i-1})} \leq (n+1)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\text{Var}[\overline{Y_i}]}{\rho_i^2} \leq \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{1}{\rho_i} - 1 \right) \leq \frac{n}{t}$$

Acotando superiormente $\frac{\text{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

De los cálculos anteriores concluimos que:

$$\begin{aligned}\frac{\text{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^n \left[1 + \frac{\text{Var}[\bar{Y}_i]}{\rho_i^2} \right] - 1 \right) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\prod_{i=1}^n \left[1 + \frac{n}{t} \right] - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\left[1 + \frac{n}{t} \right]^n - 1 \right)\end{aligned}$$

Escogemos t de manera de hacer pequeña la cota superior para $\frac{\text{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

- ▶ Vamos a escoger t de manera que sea polinomial en n y $\frac{1}{\varepsilon}$, dado que n es menor que el tamaño de la entrada $(\vec{b}, a)$
- ▶ Esperamos que n y $\frac{1}{\varepsilon^2}$ sean valores grandes, por lo que t debe disminuir el impacto de estos valores
 - ▶ Tomamos $t = c \cdot n^2 \cdot \varepsilon^{-2}$, donde c es una constante

El valor de t y una cota superior para $\frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

Tomamos $t = 5 \cdot n^2 \cdot \varepsilon^{-2}$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2} &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\left[1 + \frac{n}{t} \right]^n - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{5 \cdot n} \right]^n - 1 \right) \end{aligned}$$

El valor de t y una cota superior para $\frac{\text{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

Además, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{5 \cdot n}\right]^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{\varepsilon^2}{5 \cdot n}\right)^i \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i! \cdot (n-i)! \cdot n^i} \cdot \left(\frac{\varepsilon^2}{5}\right)^i \\ &\leq \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \cdot \left(\frac{\varepsilon^2}{5}\right)^i \\ &< \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\varepsilon^2}{5}\right)^i}{i!} \\ &= e^{\frac{\varepsilon^2}{5}} \end{aligned}$$

El valor de t y una cota superior para $\frac{\text{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

Lema

$$e^{\frac{\varepsilon^2}{5}} \leq \frac{\varepsilon^2}{4} + 1$$

Ejercicio

Demuestre el lema considerando que $0 < \frac{\varepsilon^2}{4} < \frac{1}{4}$ y el intervalo donde la función $f(x) = e^{\frac{4}{5} \cdot x} - x - 1$ es negativa.

Concluimos que:

$$\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{5 \cdot n}\right]^n \leq e^{\frac{\varepsilon^2}{5}} \leq \frac{\varepsilon^2}{4} + 1$$

El valor de t y una cota superior para $\frac{\text{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2}$

Finalmente obtenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\text{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2} &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{5 \cdot n} \right]^n - 1 \right) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\varepsilon^2}{4} + 1 - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{\varepsilon^2}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $0 < \varepsilon < 1$ obtenemos:

$$\Pr\left(\left|Z - \frac{1}{\#\text{KS}(\vec{a}, b)}\right| \geq \varepsilon \cdot \frac{1}{\#\text{KS}(\vec{a}, b)}\right) \leq \frac{\text{Var}[Z]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Z]^2} \leq \frac{1}{4} \quad (\dagger)$$

Obteniendo un FPRAS para #KS

Dado $0 < \delta < 1$, para terminar debemos demostrar que:

$$\Pr(|Z^{-1} - \#KS(\vec{a}, b)| \leq \delta \cdot \#KS(\vec{a}, b)) \geq \frac{3}{4}$$

De esta forma Z^{-1} nos da un FPRAS para #KS

Considerando $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ en (1) obtenemos:

$$\Pr\left(\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \cdot \frac{1}{\#KS(\vec{a}, b)} \leq Z \leq \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \cdot \frac{1}{\#KS(\vec{a}, b)}\right) \geq \frac{3}{4}$$

Dado que $0 < \frac{\delta}{2} < 1$, entonces tenemos que:

$$\Pr\left(\frac{1}{1 + \frac{\delta}{2}} \cdot \#KS(\vec{a}, b) \leq Z^{-1} \leq \frac{1}{1 - \frac{\delta}{2}} \cdot \#KS(\vec{a}, b)\right) \geq \frac{3}{4}$$

Obteniendo un FPRAS para #KS

Dado que $(1 - \delta) \leq \frac{1}{1 + \frac{\delta}{2}}$ y $\frac{1}{1 - \frac{\delta}{2}} \leq (1 + \delta)$, concluimos que:

$$\Pr((1 - \delta) \cdot \#KS(\vec{a}, b) \leq Z^{-1} \leq (1 + \delta) \cdot \#KS(\vec{a}, b)) \geq$$
$$\Pr\left(\frac{1}{1 + \frac{\delta}{2}} \cdot \#KS(\vec{a}, b) \leq Z^{-1} \leq \frac{1}{1 - \frac{\delta}{2}} \cdot \#KS(\vec{a}, b)\right) \geq \frac{3}{4}$$

Por lo tanto Z^{-1} nos da un FPRAS para #KS

- El número de pasos ejecutados por el algoritmo es polinomial en el tamaño de la entrada $(\vec{a}, b)$ y $\frac{1}{\delta}$ si suponemos que $\mathcal{G}$ funciona en tiempo polinomial, puesto que $\mathcal{G}$ es invocado $n \cdot t$ veces y:

$$n \cdot t = n \cdot 5 \cdot n^2 \cdot \varepsilon^{-2} = 5 \cdot n^3 \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-2} = \frac{20 \cdot n^3}{\delta^2}$$