

Pero aún no estamos listos ...

Nos falta indicar cómo generar $\varphi_0, \dots, \varphi_{n+2}$ en CNF.

- ▶ Esta secuencia es construida de la misma forma que $\psi_0, \dots, \psi_{n+2}$, pero reemplazando las fórmulas $(\neg \eta_{\vec{v}_i})$ por fórmulas en CNF

Pero aún no estamos listos ...

Nos falta indicar cómo generar $\varphi_0, \dots, \varphi_{n+2}$ en CNF.

- Esta secuencia es construida de la misma forma que $\psi_0, \dots, \psi_{n+2}$, pero reemplazando las fórmulas $(\neg \eta_{\vec{v}_i})$ por fórmulas en CNF

Suponga que $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ es un vector en $\{0, 1\}^n$

Pero aún no estamos listos ...

Nos falta indicar cómo generar $\varphi_0, \dots, \varphi_{n+2}$ en CNF.

- Esta secuencia es construida de la misma forma que $\psi_0, \dots, \psi_{n+2}$, pero reemplazando las fórmulas $(\neg \eta_{\vec{v}_i})$ por fórmulas en CNF

Suponga que $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ es un vector en $\{0, 1\}^n$

No reemplazamos $(\neg \eta_{\vec{v}})$ por una fórmula lógicamente equivalente en CNF, puesto que construir tal fórmula toma tiempo exponencial.

- La reemplazamos por una fórmula relacionada (en un sentido que será definido), y que utiliza nuevas variables proposicionales $y_1^{\vec{v}}, \dots, y_n^{\vec{v}}$

Reemplazando $(\neg \eta_{\vec{v}})$ por una fórmula en CNF

Defina la fórmula $\xi_1^{\vec{v}}$ como:

$$\xi_1^{\vec{v}} = \begin{cases} y_1^{\vec{v}} \leftrightarrow x_1 & v_1 = 1 \\ y_1^{\vec{v}} \leftrightarrow \perp & v_1 = 0 \end{cases}$$

donde $\perp$ es una contradicción arbitraria.

Reemplazando $(\neg \eta_{\vec{v}})$ por una fórmula en CNF

Defina la fórmula $\xi_1^{\vec{v}}$ como:

$$\xi_1^{\vec{v}} = \begin{cases} y_1^{\vec{v}} \leftrightarrow x_1 & v_1 = 1 \\ y_1^{\vec{v}} \leftrightarrow \perp & v_1 = 0 \end{cases}$$

donde $\perp$ es una contradicción arbitraria.

Además, para cada $i \in \{2, \dots, n\}$ defina:

$$\xi_i^{\vec{v}} = \begin{cases} y_i^{\vec{v}} \leftrightarrow (y_{i-1}^{\vec{v}} \oplus x_i) & v_i = 1 \\ y_i^{\vec{v}} \leftrightarrow y_{i-1}^{\vec{v}} & v_i = 0 \end{cases}$$

Reemplazando $(\neg \eta_{\vec{v}})$ por una fórmula en CNF

Finalmente, defina $\xi_{\vec{v}}$ como:

$$\xi_{\vec{v}} = \left(\bigwedge_{i=1}^n \xi_i^{\vec{v}} \right) \wedge \neg y_n^{\vec{v}}$$

Reemplazando $(\neg\eta_{\vec{v}})$ por una fórmula en CNF

Finalmente, defina $\xi_{\vec{v}}$ como:

$$\xi_{\vec{v}} = \left(\bigwedge_{i=1}^n \xi_i^{\vec{v}} \right) \wedge \neg y_n^{\vec{v}}$$

La fórmula $\xi_{\vec{v}}$ no es lógicamente equivalente a $(\neg\eta_{\vec{v}})$, de hecho no utilizan las mismas variables.

Reemplazando $(\neg\eta_{\vec{v}})$ por una fórmula en CNF

Finalmente, defina $\xi_{\vec{v}}$ como:

$$\xi_{\vec{v}} = \left(\bigwedge_{i=1}^n \xi_i^{\vec{v}} \right) \wedge \neg y_n^{\vec{v}}$$

La fórmula $\xi_{\vec{v}}$ no es lógicamente equivalente a $(\neg\eta_{\vec{v}})$, de hecho no utilizan las mismas variables.

- ¿Cuál es la relación entre estas fórmulas?

La relación entre $(\neg\eta_{\vec{v}})$ y $\xi_{\vec{v}}$

Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $Y^{\vec{v}} = \{y_1^{\vec{v}}, \dots, y_n^{\vec{v}}\}$

Dos valuaciones $\sigma : X \rightarrow \{0, 1\}$ y $\lambda : Y^{\vec{v}} \rightarrow \{0, 1\}$ son $\vec{v}$ -consistentes si
 $(\sigma \cup \lambda)(\xi_i^{\vec{v}}) = 1$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$

- Donde $(\sigma \cup \lambda)(x_j) = \sigma(x_j)$ y $(\sigma \cup \lambda)(y_j^{\vec{v}}) = \lambda(y_j^{\vec{v}})$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$

La relación entre $(\neg\eta_{\vec{v}})$ y $\xi_{\vec{v}}$

Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $Y^{\vec{v}} = \{y_1^{\vec{v}}, \dots, y_n^{\vec{v}}\}$

Dos valuaciones $\sigma : X \rightarrow \{0, 1\}$ y $\lambda : Y^{\vec{v}} \rightarrow \{0, 1\}$ son $\vec{v}$ -consistentes si
 $(\sigma \cup \lambda)(\xi_i^{\vec{v}}) = 1$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$

► Donde $(\sigma \cup \lambda)(x_j) = \sigma(x_j)$ y $(\sigma \cup \lambda)(y_j^{\vec{v}}) = \lambda(y_j^{\vec{v}})$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$

Lema

Para cada valuación $\sigma : X \rightarrow \{0, 1\}$, existe una única valuación $\lambda : Y^{\vec{v}} \rightarrow \{0, 1\}$ tal que σ y λ son $\vec{v}$ -consistentes.

La relación entre $(\neg\eta_{\vec{v}})$ y $\xi_{\vec{v}}$

Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $Y^{\vec{v}} = \{y_1^{\vec{v}}, \dots, y_n^{\vec{v}}\}$

Dos valuaciones $\sigma : X \rightarrow \{0, 1\}$ y $\lambda : Y^{\vec{v}} \rightarrow \{0, 1\}$ son $\vec{v}$ -consistentes si
 $(\sigma \cup \lambda)(\xi_i^{\vec{v}}) = 1$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$

► Donde $(\sigma \cup \lambda)(x_j) = \sigma(x_j)$ y $(\sigma \cup \lambda)(y_j^{\vec{v}}) = \lambda(y_j^{\vec{v}})$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$

Lema

Para cada valuación $\sigma : X \rightarrow \{0, 1\}$, existe una única valuación $\lambda : Y^{\vec{v}} \rightarrow \{0, 1\}$ tal que σ y λ son $\vec{v}$ -consistentes.

Ejercicio

Demuestre el lema.

La relación entre $(\neg\eta_{\vec{v}})$ y $\xi_{\vec{v}}$

Lema

Si dos valuaciones $\sigma : X \rightarrow \{0, 1\}$ y $\lambda : Y^{\vec{v}} \rightarrow \{0, 1\}$ son $\vec{v}$ -consistentes, entonces $\sigma(\neg\eta_{\vec{v}}) = (\sigma \cup \lambda)(\xi_{\vec{v}})$

La relación entre $(\neg\eta_{\vec{v}})$ y $\xi_{\vec{v}}$

Lema

Si dos valuaciones $\sigma : X \rightarrow \{0, 1\}$ y $\lambda : Y^{\vec{v}} \rightarrow \{0, 1\}$ son $\vec{v}$ -consistentes, entonces $\sigma(\neg\eta_{\vec{v}}) = (\sigma \cup \lambda)(\xi_{\vec{v}})$

Ejercicio

Demuestre el lema.

La relación entre $(\neg\eta_{\vec{v}})$ y $\xi_{\vec{v}}$

Lema

Si dos valuaciones $\sigma : X \rightarrow \{0, 1\}$ y $\lambda : Y^{\vec{v}} \rightarrow \{0, 1\}$ son $\vec{v}$ -consistentes, entonces $\sigma(\neg\eta_{\vec{v}}) = (\sigma \cup \lambda)(\xi_{\vec{v}})$

Ejercicio

Demuestre el lema.

Las relaciones entre $(\neg\eta_{\vec{v}})$ y $\xi_{\vec{v}}$ mostradas en los lemas son las que necesitamos para terminar la demostración.

Definiendo $\varphi_0, \dots, \varphi_{n+2}$

El algoritmo aleatorizado escoge con distribución uniforme y de manera independiente $n + 2$ vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+2}$ en $\{0, 1\}^n$, y define:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \varphi \\ \varphi_{i+1} &= \varphi_i \wedge \xi_{\vec{v}_{i+1}} \quad 1 \leq i \leq n+1\end{aligned}$$

Definiendo $\varphi_0, \dots, \varphi_{n+2}$

El algoritmo aleatorizado escoge con distribución uniforme y de manera independiente $n + 2$ vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+2}$ en $\{0, 1\}^n$, y define:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \varphi \\ \varphi_{i+1} &= \varphi_i \wedge \xi_{\vec{v}_{i+1}} \quad 1 \leq i \leq n+1\end{aligned}$$

Las fórmulas $\varphi_0, \dots, \varphi_{n+2}$ si están en CNF, puesto que podemos definir:

$$\xi_1^{\vec{v}} = \begin{cases} (\neg y_1^{\vec{v}} \vee x_1) \vee (y_1^{\vec{v}} \vee \neg x_1) & v_1 = 1 \\ \neg y_1^{\vec{v}} & v_1 = 0 \end{cases}$$

y para cada $i \in \{2, \dots, n\}$ podemos definir:

$$\xi_i^{\vec{v}} = \begin{cases} (\neg y_i^{\vec{v}} \vee y_{i-1}^{\vec{v}} \vee x_i) \wedge (y_i^{\vec{v}} \vee \neg y_{i-1}^{\vec{v}} \vee x_i) \wedge \\ (y_i^{\vec{v}} \vee y_{i-1}^{\vec{v}} \vee \neg x_i) \wedge (\neg y_i^{\vec{v}} \vee \neg y_{i-1}^{\vec{v}} \vee \neg x_i) & v_i = 1 \\ (\neg y_i^{\vec{v}} \vee y_{i-1}^{\vec{v}}) \wedge (y_i^{\vec{v}} \vee \neg y_{i-1}^{\vec{v}}) & v_i = 0 \end{cases}$$

Acotando inferiormente $\Pr_{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+2}}(\# \text{CNF-SAT}(\varphi_{k+2}) = 1)$

Sea Λ el conjunto de valuaciones $\lambda : (X \cup Y^{\vec{v}_1} \cup \dots \cup Y^{\vec{v}_{k+2}}) \rightarrow \{0, 1\}$ tal que:

Para cada $i \in \{1, \dots, k+2\}$, se tiene que $\lambda|_X$ y $\lambda|_{Y^{\vec{v}_i}}$ son $\vec{v}_i$ -consistentes

Acotando inferiormente $\Pr_{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+2}}(\# \text{CNF-SAT}(\varphi_{k+2}) = 1)$

Sea Λ el conjunto de valuaciones $\lambda : (X \cup Y^{\vec{v}_1} \cup \dots \cup Y^{\vec{v}_{k+2}}) \rightarrow \{0, 1\}$ tal que:

Para cada $i \in \{1, \dots, k+2\}$, se tiene que $\lambda|_X$ y $\lambda|_{Y^{\vec{v}_i}}$ son $\vec{v}_i$ -consistentes

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \Pr_{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+2}}(\# \text{CNF-SAT}(\varphi_{k+2}) = 1) &= \\ \Pr_{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+2}}(\# \text{CNF-SAT}(\varphi_{k+2}) = 1) &= \\ \Pr_{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+2}} \left(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} \lambda \text{ es la \u00fanica valuaci\u00f3n que satisface } \varphi_{k+2} \right) &= \\ \sum_{\lambda \in \Lambda} \Pr_{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+2}} \left(\lambda \text{ es la \u00fanica valuaci\u00f3n que satisface } \varphi_{k+2} \right) \end{aligned}$$

Acotando inferiormente $\Pr_{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+2}}(\# \text{CNF-SAT}(\varphi_{k+2}) = 1)$

Y tenemos que:

$$\Pr_{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+2}} \left(\lambda \text{ es la \u00fanica valuaci\u00f3n que satisface } \varphi_{k+2} \right) =$$

$$\Pr_{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+2}} \left(\left[\bigwedge_{i=1}^{k+2} \lambda(\xi_{\vec{v}_i}) = 1 \right] \wedge \left[\bigwedge_{\lambda' \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} \bigvee_{j=1}^{k+2} \lambda'(\xi_{\vec{v}_j}) = 0 \right] \right) =$$

$$\Pr_{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+2}} \left(\bigwedge_{i=1}^{k+2} \lambda(\xi_{\vec{v}_i}) = 1 \right) \cdot$$

$$\Pr_{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+2}} \left(\bigwedge_{\lambda' \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} \bigvee_{j=1}^{k+2} \lambda'(\xi_{\vec{v}_j}) = 0 \mid \bigwedge_{i=1}^{k+2} \lambda(\xi_{\vec{v}_i}) = 1 \right)$$

Acotando inferiormente $\Pr_{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+2}}(\# \text{CNF-SAT}(\varphi_{k+2}) = 1)$

Dado que φ no es anulable, tenemos que $\lambda|_X \neq \vec{0}$. Así, dado que $\lambda \in \Lambda$ concluimos para $i \in \{1, \dots, k+2\}$ que:

$$\begin{aligned} \Pr_{\vec{v}_i}(\lambda(\xi_{\vec{v}_i}) = 1) &= \Pr_{\vec{v}_i}(\lambda|_X(\neg \eta_{\vec{v}_i}) = 1) \\ &= \Pr_{\vec{v}_i}(\langle \lambda|_X, \vec{v}_i \rangle = 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Acotando inferiormente $\Pr_{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+2}}(\# \text{CNF-SAT}(\varphi_{k+2}) = 1)$

Dado que φ no es anulable, tenemos que $\lambda|_X \neq \vec{0}$. Así, dado que $\lambda \in \Lambda$ concluimos para $i \in \{1, \dots, k+2\}$ que:

$$\begin{aligned} \Pr_{\vec{v}_i}(\lambda(\xi_{\vec{v}_i}) = 1) &= \Pr_{\vec{v}_i}(\lambda|_X(\neg\eta_{\vec{v}_i}) = 1) \\ &= \Pr_{\vec{v}_i}(\langle \lambda|_X, \vec{v}_i \rangle = 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sea $\lambda' \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$. Dado que φ no es anulable y $\lambda \neq \lambda'$, tenemos que $\lambda|_X \neq \vec{0}$, $\lambda'|_X \neq \vec{0}$ y $\lambda|_X \neq \lambda'|_X$, por lo que concluimos para $i \in \{1, \dots, k+2\}$ que:

$$\begin{aligned} \Pr_{\vec{v}_i}(\lambda'(\xi_{\vec{v}_i}) = 1 \mid \lambda(\xi_{\vec{v}_i}) = 1) &= \Pr_{\vec{v}_i}(\lambda'|_X(\neg\eta_{\vec{v}_i}) = 1 \mid \lambda|_X(\neg\eta_{\vec{v}_i}) = 1) \\ &= \Pr_{\vec{v}_i}(\langle \lambda'|_X, \vec{v}_i \rangle = 0 \mid \langle \lambda|_X, \vec{v}_i \rangle = 0) \\ &= \Pr_{\vec{v}_i}(\langle \lambda'|_X, \vec{v}_i \rangle = 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Acotando inferiormente $\Pr_{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+2}}(\# \text{CNF-SAT}(\varphi_{k+2}) = 1)$

Utilizando los resultados anteriores y considerando que $|\Lambda| = |\Gamma|$, concluimos como en el caso de $\psi_0, \dots, \psi_{n+2}$ que:

$$\Pr_{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+2}}(\# \text{CNF-SAT}(\varphi_{k+2}) = 1) \geq \frac{1}{8}$$

Esto concluye la demostración del teorema. □