¿Cómo podemos calcular una función #P-completa?

Sea $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ una función en $\#$P

Si la función f es $\#$P-completa entonces no esperamos tener un algoritmo polinomial para calcularla.

¿Cómo podemos calcular una función #P-completa?

Sea $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ una función en #P

Si la función f es #P-completa entonces no esperamos tener un algoritmo polinomial para calcularla.

Pero el hecho de que f sea #P-completa no implica que el valor de f no pueda ser aproximado de manera eficiente.

¿Cómo podemos calcular una función #P-completa?

Sea $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ una función en #P

Si la función f es #P-completa entonces no esperamos tener un algoritmo polinomial para calcularla.

Pero el hecho de que f sea #P-completa no implica que el valor de f no pueda ser aproximado de manera eficiente.

- Vamos a estudiar una noción de aproximación aleatorizada para funciones en #P

Aproximación aleatorizada de funciones

Sea $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$

- Y sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales mayores a 0

Aproximación aleatorizada de funciones

Sea $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$

- Y sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales mayores a 0

Definición

Un algoritmo aleatorizado $\mathcal{A} : \Sigma^* \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ es un **fully polynomial randomized approximation scheme (FPRAS)** *para f si existe un polinomio $p(x, y)$ tal que para cada $w \in \Sigma^*$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$:*

1. *El número de pasos ejecutados por $\mathcal{A}(w, \varepsilon)$ es menor o igual a $p(|w|, \frac{1}{\varepsilon})$*
2. $\mathbf{Pr}(|\mathcal{A}(w, \varepsilon) - f(w)| \leq \varepsilon \cdot f(w)) \geq \frac{3}{4}$

Un enfoque general para construir un FPRAS

Dada una función $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$, $w \in \Sigma^*$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, definimos una variable aleatoria X tal que $\mathbf{E}[X] = f(w)$

- Para tener una estimación de $f(w)$ nos basta muestrear la variable aleatoria X

Un enfoque general para construir un FPRAS

Dada una función $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$, $w \in \Sigma^*$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, definimos una variable aleatoria X tal que $\mathbf{E}[X] = f(w)$

- Para tener una estimación de $f(w)$ nos basta muestrear la variable aleatoria X

Debe ser posible muestrear X en tiempo polinomial en $|w|$ y $\frac{1}{\varepsilon}$, y además debemos tener que $\mathbf{Pr}(|X - f(w)| \leq \varepsilon \cdot f(w)) \geq \frac{3}{4}$

- Debemos entonces acotar inferiormente $\mathbf{Pr}(|X - \mathbf{E}[X]| \leq \varepsilon \cdot \mathbf{E}[X])$

Un enfoque general para construir un FPRAS

Dada una función $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$, $w \in \Sigma^*$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, definimos una variable aleatoria X tal que $\mathbf{E}[X] = f(w)$

- Para tener una estimación de $f(w)$ nos basta muestrear la variable aleatoria X

Debe ser posible muestrear X en tiempo polinomial en $|w|$ y $\frac{1}{\varepsilon}$, y además debemos tener que $\mathbf{Pr}(|X - f(w)| \leq \varepsilon \cdot f(w)) \geq \frac{3}{4}$

- Debemos entonces acotar inferiormente $\mathbf{Pr}(|X - \mathbf{E}[X]| \leq \varepsilon \cdot \mathbf{E}[X])$

Vamos a estudiar entonces algunas desigualdades útiles para obtener una cota inferior para $\mathbf{Pr}(|X - \mathbf{E}[X]| \leq \varepsilon \cdot \mathbf{E}[X])$

La desigualdad de Markov

Teorema

Sea X una variable aleatoria no negativa. Para cada $a \in \mathbb{R}^+$ se tiene que:

$$\mathbf{Pr}(X \geq a) \quad \leq \quad \frac{\mathbf{E}[X]}{a}$$

Una demostración de la desigualdad de Markov

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \sum_{r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}} r \cdot \mathbf{Pr}(X = r) \\
&= \Bigg(\sum_{r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \,:\, r < a} r \cdot \mathbf{Pr}(X = r)\Bigg) + \Bigg(\sum_{s \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \,:\, s \geq a} s \cdot \mathbf{Pr}(X = s)\Bigg) \\
&\geq \sum_{s \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \,:\, s \geq a} s \cdot \mathbf{Pr}(X = s) \\
&\geq \sum_{s \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \,:\, s \geq a} a \cdot \mathbf{Pr}(X = s) \\
&= a \cdot \Bigg(\sum_{s \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \,:\, s \geq a} \mathbf{Pr}(X = s)\Bigg) \\
&= a \cdot \mathbf{Pr}(X \geq a)
\end{aligned}
$$

Una demostración de la desigualdad de Markov

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \sum_{r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}} r \cdot \mathbf{Pr}(X = r) \\
&= \left(\sum_{r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \,:\, r < a} r \cdot \mathbf{Pr}(X = r) \right) + \left(\sum_{s \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \,:\, s \geq a} s \cdot \mathbf{Pr}(X = s) \right) \\
&\geq \sum_{s \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \,:\, s \geq a} s \cdot \mathbf{Pr}(X = s) \\
&\geq \sum_{s \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \,:\, s \geq a} a \cdot \mathbf{Pr}(X = s) \\
&= a \cdot \left(\sum_{s \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \,:\, s \geq a} \mathbf{Pr}(X = s) \right) \\
&= a \cdot \mathbf{Pr}(X \geq a)
\end{aligned}
$$

Concluimos que $\mathbf{Pr}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{a}$ $\square$

La desigualdad de Chebyshev

Teorema

$$\mathbf{Pr}(|X - \mathbf{E}[X]| \geq a) \quad \leq \quad \frac{\mathbf{Var}[X]}{a^2}$$

La desigualdad de Chebyshev

Teorema

$$\mathbf{Pr}(|X - \mathbf{E}[X]| \geq a) \quad \leq \quad \frac{\mathbf{Var}[X]}{a^2}$$

Demostración. Utilizando la desigualdad de Markov obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Pr}(|X - \mathbf{E}[X]| \geq a) \quad &= \quad \mathbf{Pr}((X - \mathbf{E}[X])^2 \geq a^2) \\
&\leq \quad \frac{\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2]}{a^2} \\
&= \quad \frac{\mathbf{Var}[X]}{a^2}
\end{aligned}$$

$\square$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev

A partir de la desigualdad de Chebyshev obtenemos:

$$\mathbf{Pr}(|X - \mathbf{E}[X]| \leq \varepsilon \cdot \mathbf{E}[X]) \quad \geq \quad 1 - \frac{\mathbf{Var}[X]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[X]^2}$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev

A partir de la desigualdad de Chebyshev obtenemos:

$$\mathbf{Pr}(|X - \mathbf{E}[X]| \leq \varepsilon \cdot \mathbf{E}[X]) \quad \geq \quad 1 - \frac{\mathbf{Var}[X]}{\varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[X]^2}$$

Es posible mejorar esta cota inferior considerando el promedio de $k \geq 2$ muestras de X obtenidas de manera independiente.

- Así reducimos el impacto de las muestras alejadas de $\mathbf{E}[X]$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev

Por la desigualdad de Chebyshev:

$$\mathbf{Pr}\left(\left|\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}X_i - \mathbf{E}\left[\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}X_i\right]\right| \geq \varepsilon\cdot\mathbf{E}\left[\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}X_i\right]\right) \quad\leq\quad \frac{\mathbf{Var}\left[\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}X_i\right]}{\varepsilon^2\cdot\mathbf{E}\left[\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}X_i\right]^2}$$

Además, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}X_i\right] &= \frac{1}{k}\cdot\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{k}X_i\right] \\
&= \frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}\mathbf{E}[X_i] \\
&= \frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}\mathbf{E}[X] \\
&= \mathbf{E}[X]
\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}\left[\frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} X_i\right] &= \frac{1}{k^2} \cdot \mathbf{Var}\left[\sum_{i=1}^{k} X_i\right] \\
&= \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{i=1}^{k} \mathbf{Var}[X_i] \\
&= \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{i=1}^{k} \mathbf{Var}[X] \\
&= \frac{1}{k} \cdot \mathbf{Var}[X]
\end{aligned}$$

De lo cual concluimos que:

$$\mathbf{Pr}\left(\left|\frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} X_i - \mathbf{E}[X]\right| \geq \varepsilon \cdot \mathbf{E}[X]\right) \leq \frac{\mathbf{Var}[X]}{k \cdot \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[X]^2}$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev

Realizando k muestras independientes de la variable aleatoria X obtenemos entonces:

$$\mathbf{Pr}\left(\left|\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k} X_i - \mathbf{E}[X]\right| \leq \varepsilon \cdot \mathbf{E}[X]\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\mathbf{Var}[X]}{k\cdot\varepsilon^2\cdot\mathbf{E}[X]^2}$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev

Realizando k muestras independientes de la variable aleatoria X obtenemos entonces:

$$\mathbf{Pr}\left(\left|\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k} X_i - \mathbf{E}[X]\right| \leq \varepsilon \cdot \mathbf{E}[X]\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{\mathbf{Var}[X]}{k\cdot\varepsilon^2\cdot\mathbf{E}[X]^2}$$

Podemos entonces ajustar el valor de k para obtener un FPRAS.

- El valor de $\mathbf{Var}[X]$ debe ser polinomial en el tamaño de la entrada para obtener un FPRAS.

Construyendo un FPRAS para #DNF-SAT

Sea $\varphi = D_1 \vee \cdots \vee D_m$ una formula proposicional en DNF

- Cada D_i es una conjunción de literales
- φ menciona n variables proposicionales, vale decir, $\text{nv}(\varphi) = n$

Suponemos que cada D_i no tiene literales repetidos ni complementarios

- ¿Por qué podemos suponer esto?
- Sea ℓ_i el número de literales mencionados en D_i

Un FPRAS para #DNF-SAT: primer intento

Suponga que las asignaciones de valores de verdad σ para φ son escogidas con distribución uniforme:

$$\mathbf{Pr}(\sigma) \quad = \quad \frac{1}{2^n}$$

Y considere la siguiente variable aleatoria:

$$X(\sigma) \quad = \quad \begin{cases} 2^n & \sigma(\varphi) = 1 \\ 0 & \sigma(\varphi) = 0 \end{cases}$$

Un FPRAS para #DNF-SAT: primer intento

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \sum_{\sigma} X(\sigma) \cdot \mathbf{Pr}(\sigma) \\
&= \sum_{\sigma \,:\, \sigma(\varphi)=1} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{\sigma \,:\, \sigma(\varphi)=1} 1 \\
&= \#\text{DNF-SAT}(\varphi)
\end{aligned}$$

Un FPRAS para #DNF-SAT: primer intento

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \sum_{\sigma} X(\sigma) \cdot \mathbf{Pr}(\sigma) \\
&= \sum_{\sigma \,:\, \sigma(\varphi)=1} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{\sigma \,:\, \sigma(\varphi)=1} 1 \\
&= \#\text{DNF-SAT}(\varphi)
\end{aligned}
$$

Tenemos entonces que $\mathbf{E}[X] = \#\text{DNF-SAT}(\varphi)$, el primer requisito para la variable aleatoria que queremos construir

- Además se puede muestrear X en tiempo polinomial en n
  - ¿Cómo se hace esto?

Un FPRAS para #DNF-SAT: primer intento

Nos falta calcular **Var**$[X]$ para saber si podemos obtener un FPRAS.

Un FPRAS para #DNF-SAT: primer intento

Nos falta calcular **Var**$[X]$ para saber si podemos obtener un FPRAS.

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X^2] &= \sum_{\sigma} X^2(\sigma) \cdot \mathbf{Pr}(\sigma) \\
&= \sum_{\sigma \,:\, \sigma(\varphi)=1} 2^{2 \cdot n} \cdot \frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{\sigma \,:\, \sigma(\varphi)=1} 2^n \\
&= 2^n \cdot \#\text{DNF-SAT}(\varphi)
\end{aligned}$$

Un FPRAS para #DNF-SAT: primer intento

Nos falta calcular $\mathbf{Var}[X]$ para saber si podemos obtener un FPRAS.

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X^2] &= \sum_{\sigma} X^2(\sigma) \cdot \mathbf{Pr}(\sigma) \\
&= \sum_{\sigma \,:\, \sigma(\varphi)=1} 2^{2 \cdot n} \cdot \frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{\sigma \,:\, \sigma(\varphi)=1} 2^n \\
&= 2^n \cdot \#\text{DNF-SAT}(\varphi)
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}[X] &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 \\
&= 2^n \cdot \#\text{DNF-SAT}(\varphi) - \#\text{DNF-SAT}(\varphi)^2 \\
&= (2^n - \#\text{DNF-SAT}(\varphi)) \cdot \#\text{DNF-SAT}(\varphi)
\end{aligned}$$

Un FPRAS para #DNF-SAT: primer intento

Realizando k muestras independientes de X obtenemos entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Pr}\left(\left|\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k} X_i - \mathbf{E}[X]\right| \geq \varepsilon\cdot\mathbf{E}[X]\right) &\leq \frac{\mathbf{Var}[X]}{k\cdot\varepsilon^2\cdot\mathbf{E}[X]^2}\\
&= \frac{(2^n - \#\text{DNF-SAT}(\varphi))\cdot\#\text{DNF-SAT}(\varphi)}{k\cdot\varepsilon^2\cdot\#\text{DNF-SAT}(\varphi)^2}\\
&= \frac{2^n - \#\text{DNF-SAT}(\varphi)}{k\cdot\varepsilon^2\cdot\#\text{DNF-SAT}(\varphi)}
\end{aligned}
$$

Un FPRAS para #DNF-SAT: primer intento

Realizando k muestras independientes de X obtenemos entonces:

$$\mathbf{Pr}\left(\left|\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}X_i-\mathbf{E}[X]\right|\geq\varepsilon\cdot\mathbf{E}[X]\right)\leq\frac{\mathbf{Var}[X]}{k\cdot\varepsilon^2\cdot\mathbf{E}[X]^2}$$
$$=\frac{(2^n-\#\text{DNF-SAT}(\varphi))\cdot\#\text{DNF-SAT}(\varphi)}{k\cdot\varepsilon^2\cdot\#\text{DNF-SAT}(\varphi)^2}$$
$$=\frac{2^n-\#\text{DNF-SAT}(\varphi)}{k\cdot\varepsilon^2\cdot\#\text{DNF-SAT}(\varphi)}$$

Por lo tanto, para obtener $\mathbf{Pr}(|\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}X_i-\mathbf{E}[X]|\geq\varepsilon\cdot\mathbf{E}[X])\leq\frac{1}{4}$ necesitamos imponer la siguiente restricción sobre k:

$$\frac{4\cdot(2^n-\#\text{DNF-SAT}(\varphi))}{\varepsilon^2\cdot\#\text{DNF-SAT}(\varphi)}\quad\leq\quad k$$

Un FPRAS para #DNF-SAT: primer intento

Tomando entonces:

$$k \quad = \quad \left\lceil \frac{4 \cdot (2^n - \#\text{DNF-SAT}(\varphi))}{\varepsilon^2 \cdot \#\text{DNF-SAT}(\varphi)} \right\rceil$$

obtenemos la cota superior deseada para la probabilidad de error.

Un FPRAS para #DNF-SAT: primer intento

Tomando entonces:

$$k = \left\lceil \frac{4 \cdot (2^n - \#\text{DNF-SAT}(\varphi))}{\varepsilon^2 \cdot \#\text{DNF-SAT}(\varphi)} \right\rceil$$

obtenemos la cota superior deseada para la probabilidad de error.

¡Pero el valor de k puede ser exponencial en n, lo cual significa que el algoritmo aleatorizado resultante es de tiempo exponencial!

- Por ejemplo, si $\#\text{DNF-SAT}(\varphi)$ es polinomial en n

Un FPRAS para #DNF-SAT: primer intento

Tomando entonces:

$$k \quad = \quad \left\lceil \frac{4 \cdot (2^n - \#\text{DNF-SAT}(\varphi))}{\varepsilon^2 \cdot \#\text{DNF-SAT}(\varphi)} \right\rceil$$

obtenemos la cota superior deseada para la probabilidad de error.

¡Pero el valor de k puede ser exponencial en n, lo cual significa que el algoritmo aleatorizado resultante es de tiempo exponencial!

- Por ejemplo, si #DNF-SAT(φ) es polinomial en n

Vamos a estudiar un segundo enfoque que si da el resultado deseado.

- El primer enfoque no utilizaba el hecho de que φ está en DNF

Un FPRAS para #DNF-SAT: segundo intento

Recuerde que $\varphi = D_1 \vee \cdots \vee D_m$

- Donde cada D_i menciona ℓ_i literales, y no contiene literales repetidos ni complementarios

Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ sea $S_i = |\{\sigma \mid \sigma(D_i) = 1\}|$, y sea $M = \sum_{i=1}^{m} S_i$

- Tenemos que $S_i = 2^{n-\ell_i}$

Además, para cada valuación σ sea $d(\sigma) = |\{i \in \{1, \ldots, m\} \mid \sigma(D_i) = 1\}|$

- Tenemos que $\sigma(\varphi) = 1$ si y sólo si $d(\sigma) \geq 1$

Un FPRAS para #DNF-SAT: segundo intento

Suponga que las asignaciones de valores de verdad σ para φ son escogidas de manera que:

$$\mathbf{Pr}(\sigma) = \frac{d(\sigma)}{M}$$

Nótese que esta probabilidad está bien definida puesto que $1 \leq M$ y $d(\sigma) \leq M$

Y considere la siguiente variable aleatoria:

$$Y(\sigma) = \begin{cases} \frac{M}{d(\sigma)} & \sigma(\varphi) = 1 \\ 0 & \sigma(\varphi) = 0 \end{cases}$$

Un FPRAS para #DNF-SAT: segundo intento

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y] &= \sum_{\sigma} Y(\sigma) \cdot \mathbf{Pr}(\sigma) \\
&= \sum_{\sigma \,:\, \sigma(\varphi)=1} \frac{M}{d(\sigma)} \cdot \frac{d(\sigma)}{M} \\
&= \sum_{\sigma \,:\, \sigma(\varphi)=1} 1 \\
&= \#\text{DNF-SAT}(\varphi)
\end{aligned}
$$

Un FPRAS para #DNF-SAT: segundo intento

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y] &= \sum_{\sigma} Y(\sigma) \cdot \mathbf{Pr}(\sigma) \\
&= \sum_{\sigma\,:\,\sigma(\varphi)=1} \frac{M}{d(\sigma)} \cdot \frac{d(\sigma)}{M} \\
&= \sum_{\sigma\,:\,\sigma(\varphi)=1} 1 \\
&= \#\text{DNF-SAT}(\varphi)
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que $\mathbf{E}[Y] = \#\text{DNF-SAT}(\varphi)$, el primer requisito que debemos cumplir

- ¿Cómo podemos muestrear Y en tiempo polinomial en el tamaño de φ?

Muestreando Y en tiempo polinomial

Para obtener un valor de Y realizamos los siguientes pasos:

1. Escoja $i \in \{1, \ldots, m\}$ con probabilidad $\dfrac{S_i}{M}$
2. Escoja σ tal que $\sigma(D_i) = 1$ con distribución uniforme
3. Retorne $Y(\sigma)$

Muestreando Y en tiempo polinomial

Para obtener un valor de Y realizamos los siguientes pasos:

1. Escoja $i \in \{1, \ldots, m\}$ con probabilidad $\dfrac{S_i}{M}$
2. Escoja σ tal que $\sigma(D_i) = 1$ con distribución uniforme
3. Retorne $Y(\sigma)$

¿Cómo se realiza el paso 1 en tiempo polinomial en el tamaño de φ?

Muestreando Y en tiempo polinomial

Para obtener un valor de Y realizamos los siguientes pasos:

1. Escoja $i \in \{1, \ldots, m\}$ con probabilidad $\dfrac{S_i}{M}$
2. Escoja σ tal que $\sigma(D_i) = 1$ con distribución uniforme
3. Retorne $Y(\sigma)$

¿Cómo se realiza el paso 1 en tiempo polinomial en el tamaño de φ?

- ¿Por qué no se puede hacer algo similar y escoger directamente σ con probabilidad $\frac{d(\sigma)}{M}$?

Muestreando Y en tiempo polinomial

Nos falta calcular la probabilidad de escoger σ en los pasos 1 y 2

Muestreando Y en tiempo polinomial

Nos falta calcular la probabilidad de escoger σ en los pasos 1 y 2

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Pr}(\sigma) &= \sum_{i=1}^{m} \mathbf{Pr}(\sigma \mid D_i) \cdot \mathbf{Pr}(D_i) \\
&= \sum_{i \,:\, \sigma(D_i)=1} \mathbf{Pr}(\sigma \mid D_i) \cdot \mathbf{Pr}(D_i) \\
&= \sum_{i \,:\, \sigma(D_i)=1} \frac{1}{S_i} \cdot \frac{S_i}{M} \\
&= \sum_{i \,:\, \sigma(D_i)=1} \frac{1}{M} \\
&= \frac{1}{M} \cdot \sum_{i \,:\, \sigma(D_i)=1} 1 \\
&= \frac{d(\sigma)}{M}
\end{aligned}$$

Un FPRAS para #DNF-SAT: segundo intento

Nos falta calcular **Var**$[Y]$ para saber si podemos obtener un FPRAS.

Un FPRAS para #DNF-SAT: segundo intento

Nos falta calcular $\mathbf{Var}[Y]$ para saber si podemos obtener un FPRAS.

- En lugar de hacer esto, vamos a acotar superiormente $\dfrac{\mathbf{Var}[Y]}{\mathbf{E}[Y]^2}$

Un FPRAS para #DNF-SAT: segundo intento

Nos falta calcular $\mathbf{Var}[Y]$ para saber si podemos obtener un FPRAS.

- En lugar de hacer esto, vamos a acotar superiormente $\dfrac{\mathbf{Var}[Y]}{\mathbf{E}[Y]^2}$

Si $\sigma(\varphi) = 1$ tenemos que $\dfrac{M}{m} \leq Y(\sigma) \leq M$

- Por lo tanto $\dfrac{M}{m} \leq \mathbf{E}[Y] \leq M$

Concluimos que:

$$\frac{M}{m} - M \leq Y - \mathbf{E}[Y] \leq M - \frac{M}{m}$$

Un FPRAS para #DNF-SAT: segundo intento

Tenemos entonces que:

$$|Y - \mathbf{E}[Y]| \quad \leq \quad \frac{M}{m} \cdot (m-1)$$

De lo cual se concluye que $(Y - \mathbf{E}[Y])^2 \leq (\frac{M}{m})^2 \cdot (m-1)^2$

- Por lo tanto $\mathbf{Var}[Y] \leq (\frac{M}{m})^2 \cdot (m-1)^2$

Un FPRAS para #DNF-SAT: segundo intento

Tenemos entonces que:

$$|Y - \mathbf{E}[Y]| \quad \leq \quad \frac{M}{m} \cdot (m-1)$$

De lo cual se concluye que $(Y - \mathbf{E}[Y])^2 \leq (\frac{M}{m})^2 \cdot (m-1)^2$

- Por lo tanto $\mathbf{Var}[Y] \leq (\frac{M}{m})^2 \cdot (m-1)^2$

Como $\frac{M}{m} \leq \mathbf{E}[Y]$, sabemos que $\frac{1}{\mathbf{E}[Y]} \leq \frac{m}{M}$

Concluimos que: $\dfrac{\mathbf{Var}[Y]}{\mathbf{E}[Y]^2} \ \leq \ \left(\dfrac{m}{M}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{M}{m}\right)^2 \cdot (m-1)^2 \ = \ (m-1)^2$

Un FPRAS para #DNF-SAT: primer intento

Realizando k muestras independientes de Y obtenemos entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Pr}\left(\left|\frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} Y_i - \mathbf{E}[Y]\right| \geq \varepsilon \cdot \mathbf{E}[Y]\right) &\leq \frac{\mathbf{Var}[Y]}{k \cdot \varepsilon^2 \cdot \mathbf{E}[Y]^2} \\
&\leq \frac{(m-1)^2}{k \cdot \varepsilon^2}
\end{aligned}$$

Un FPRAS para #DNF-SAT: primer intento

Realizando k muestras independientes de Y obtenemos entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{Pr}\left(\left|\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k} Y_i - \mathbf{E}[Y]\right| \geq \varepsilon\cdot\mathbf{E}[Y]\right) &\leq \frac{\mathbf{Var}[Y]}{k\cdot\varepsilon^2\cdot\mathbf{E}[Y]^2} \\ &\leq \frac{(m-1)^2}{k\cdot\varepsilon^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, para obtener $\mathbf{Pr}(|\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k} Y_i - \mathbf{E}[Y]| \geq \varepsilon\cdot\mathbf{E}[Y]) \leq \frac{1}{4}$ imponemos la siguiente restricción sobre k:

$$\frac{4\cdot(m-1)^2}{\varepsilon^2} \leq k$$

Un FPRAS para #DNF-SAT: primer intento

Tomando entonces:

$$k = \left\lceil \frac{4 \cdot (m-1)^2}{\varepsilon^2} \right\rceil$$

obtenemos la cota superior deseada para la probabilidad de error.

Un FPRAS para #DNF-SAT: primer intento

Tomando entonces:

$$k \quad = \quad \left\lceil \frac{4 \cdot (m-1)^2}{\varepsilon^2} \right\rceil$$

obtenemos la cota superior deseada para la probabilidad de error.

¡El algoritmo aleatorizado resultante funciona en tiempo polinomial en el tamaño de φ y $\frac{1}{\varepsilon}$!

Un FPRAS para #DNF-SAT: primer intento

Tomando entonces:

$$k = \left\lceil \frac{4 \cdot (m-1)^2}{\varepsilon^2} \right\rceil$$

obtenemos la cota superior deseada para la probabilidad de error.

¡El algoritmo aleatorizado resultante funciona en tiempo polinomial en el tamaño de φ y $\frac{1}{\varepsilon}$!

- Debemos realizar k muestras independientes de Y, donde k depende polinomialmente de m y $\frac{1}{\varepsilon}$
- Cada una de las muestras puede ser obtenida en tiempo polinomial en el tamaño de φ