

Clases de complejidad de funciones

IIC3810

Marcelo Arenas y Luis Alberto Croquevielle

Calculando una función

Dado un alfabeto Σ , consideramos funciones $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$

Representamos cada número natural como un string sobre el alfabeto $\{0, \dots, 9\}$

- ▶ Si una MTC calcula una función $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$, entonces para cada $w \in \Sigma^*$ suponemos que $f(w)$ es retornado en la cinta de salida como un string sobre el alfabeto $\{0, \dots, 9\}$

Las funciones computables en tiempo polinomial

Definición

Una función $f : \Sigma^ \rightarrow \mathbb{N}$ está en la clase **FP** si y sólo si existe una MTC que funciona en tiempo polinomial y calcula f*

Las funciones computables en tiempo polinomial

Definición

Una función $f : \Sigma^ \rightarrow \mathbb{N}$ está en la clase **FP** si y sólo si existe una MTC que funciona en tiempo polinomial y calcula f*

¿Qué funciones son difíciles de computar?

Las funciones computables en tiempo polinomial

Definición

Una función $f : \Sigma^ \rightarrow \mathbb{N}$ está en la clase **FP** si y sólo si existe una MTC que funciona en tiempo polinomial y calcula f*

¿Qué funciones son difíciles de computar?

- Consideramos funciones que si son computables en tiempo polinomial nos dan algoritmos polinomiales para resolver problemas NP-completos

La clase de funciones $\#P$

Sea M una MT no determinista con alfabeto de entrada Σ

La clase de funciones $\#P$

Sea M una MT no determinista con alfabeto de entrada Σ

Supuesto

Si decimos que M funciona en tiempo polinomial, entonces suponemos que existe un polinomio $p(n)$ tal que para cada $w \in \Sigma^*$ y cada ejecución de M con entrada w , el número de pasos en la ejecución es menor o igual a $p(|w|)$

La clase de funciones $\#P$

Sea M una MT no determinista con alfabeto de entrada Σ

Supuesto

Si decimos que M funciona en tiempo polinomial, entonces suponemos que existe un polinomio $p(n)$ tal que para cada $w \in \Sigma^*$ y cada ejecución de M con entrada w , el número de pasos en la ejecución es menor o igual a $p(|w|)$

- ¿Por qué podemos realizar este supuesto sin pérdida de generalidad?

La clase de funciones $\#P$

Sea M una MT no determinista con alfabeto de entrada Σ

Supuesto

Si decimos que M funciona en tiempo polinomial, entonces suponemos que existe un polinomio $p(n)$ tal que para cada $w \in \Sigma^*$ y cada ejecución de M con entrada w , el número de pasos en la ejecución es menor o igual a $p(|w|)$

- ¿Por qué podemos realizar este supuesto sin pérdida de generalidad?

Dado $w \in \Sigma^*$, definimos $\text{accept}_M(w)$ como el número de ejecuciones de M con entrada w que se detienen en un estado final.

- En particular, $w \in L(M)$ si y sólo si $\text{accept}_M(w) > 0$

La clase de funciones $\#P$

Definición

Una función $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ está en $\#P$ si y sólo si existe una MT no determinista M con alfabeto de entrada Σ , que funciona en tiempo polinomial y tal que para cada $w \in \Sigma^*$: $f(w) = \text{accept}_M(w)$

La clase de funciones $\#P$

Definición

Una función $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ está en $\#P$ si y sólo si existe una MT no determinista M con alfabeto de entrada Σ , que funciona en tiempo polinomial y tal que para cada $w \in \Sigma^*$: $f(w) = \text{accept}_M(w)$

Ejercicio

Sea $\#SAT$ una función tal que, dada una fórmula proposicional φ , retorna el número de valuaciones que satisfacen φ . Demuestre que $\#SAT \in \#P$

Para pensar ...

Ejercicios

1. Demuestre que si $f, g \in \#P$, entonces $f + 1 \in \#P$ y $f + g \in \#P$
2. Demuestre que si $f, g \in \#P$, entonces $f \cdot g \in \#P$
3. Demuestre que $FP \subseteq \#P$