NASH está en PPAD

Tópicos Avanzados en Teoría de la Computación

Iván Wolf Olivares

June 2, 2016

Outline

Outline

Algo de notación

Buscando un equilibrio aproximado

Definición

Un n-juego finito $\mathcal{G}$ se define como $([n], \{S_p\}_{p\in[n]}, \{u_p(\cdot)\}_{p\in[n]})$, donde

- Tenemos un conjunto de n jugadore $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$
- Cada jugador $p \in [n]$ tiene un conjunto finito de acciones o estrategias S_p.
- El conjunto $S = \times_{p\in[n]} S_p$ es el conjunto de perfiles de acciones.
- Cada jugador puede elegir una distribución de estrategias $x_p \in \Delta^{S_p} = \{y_p \in \mathbb{R}_+^m \mid \sum_{s_p \in S_p} y_p(s_p) = 1,\ m = |S_p|\}$.
- Cada jugador tiene una función de utilidad $u_p : S \to \mathbb{R}_+$.

Dado un perfil de estrategias mixtas $x \in \Delta = \times_{p\in[n]} \Delta^{S_p}$, la ganancia del jugador p está dada por el valor esperado de la utilidad

$$u_p(x) = \mathbb{E}_{s\sim x}[u_p(s)]$$

Equilibrio de Nash

Buscando un equilibrio aproximado

Dada un perfil de estrategias $s \in S$, denotamos por s_p la estrategia del jugador p y s_{-p} como las estrategias de todos los demás. Similarmente, dado $x \in \Delta$, decimos que x_p es la distribución de estrategias del jugador p y x_{-p} la distribución de estrategias de todos los demás.
Bajo esta notación tenemos:

Definición

Una distribución de estrategias $x \in \Delta$ es un *Equilibrio de Nash* si para todo jugador p y para todo par de estrategias s_p, $s'_p \in S_p$ tal que $x_p(s_p) > 0$, tenemos

$$u_p(s_p; x_{-p}) \geq u_p(s'_p; x_{-p})$$

En otras palabras, x es un equilibrio de Nash si y sólo si ningún jugador tiene algún incentivo para cambiar su estrategia.

ϵ-NASH

Buscando un equilibrio aproximado

Para poder lidiar con número irracionales introducimos al noción de una *equilibrio aproximado*:

Definición

Sea $\epsilon > 0$. Una distribución de estrategias $x \in \Delta$ se dice ser un ϵ-equilibrio de Nash si para todo jugador p y para todo par de estrategias $s_p, s'_p \in S_p$ tal que $x_p(s_p) > 0$, tenemos

$$u_p(s_p; x_{-p}) \geq u_p(s'_p; x_{-p}) - \epsilon$$

NASH como problema computacional

Buscando un equilibrio aproximado

Ahora si estamos en condiciones de, *por fin*, definir nuestro problema

NASH

Dado un n-juego finito $\mathcal{G}$ y un número racional $\epsilon > 0$, encontrar un ϵ-equilibrio de Nash para $\mathcal{G}$.

Notar que

A nuestro problema le pasamos un juego, para eso le tenemos que dar explicitamente la utilidad de cada jugador correspondiente a cada perfil de estrategias.

Qué tan grande puede ser la representación de un juego de n jugadores?

Outline

Lema de Sperner

El último ingrediente

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Para el mallado triangulizado de paso $\delta = 2^{-n}$ del cuadrado unitario $[0,1]^2$ y los colores $\{0,1,2\}$, se define la siguiente propiedad P:

Definición(Propiedad P)

- Los lados $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ del cuadrado, con no contienen vertices con el color 1 ni 2.
- Los lados $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$ del cuadrado no contienen vertices con el color 0.

Lema(Sperner en 2 dimensiones)

Todo mallado triangulizado del cuadrado unitario que cumpla la propiedad P contiene un triángulo con todos sus vértices de distinto color.

El problema del Equilibrio de Nash

Ignorar por un momento las flechas y los triángulos marcados

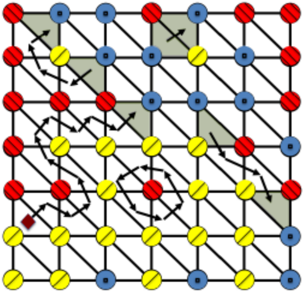

Figure: Un ejemplo en $[0, 1]^2$.

SPERNER como un porblema computacional

El último ingrediente

A partir del lema se define el siguiente problema computacional

2D-SPERNER

Dada una función de coloración, definida por un circuito C de $2n$ inputs (los sufucientes bits para representar cualquier punto del mallado) que retorna un color 0, 1 o 2. Encontrar $x \in \{0,1\}^{2n}$ tal que viola la propiedad P o un triángulo tricromático.

SPERNER $\in$ PPAD

Qué tan dificil es el problema NASH

Probaremos que dada una instancia del problema SPERNER, su solución está garantizada por el argumento de paridad para grafos dirigidos.

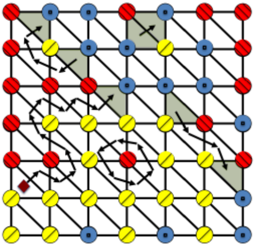

Figure: Un ejemplo en $[0, 1]^2$.

No le quitemos mérito a Sperner

Lo general es mejor que lo particular

Observación

El lema de Sperner se cumple para cualquier n-cubo dividido en n-simplex más pequeños. El problema computacional es fácilmente generalizable y se puede argumentar que el problema sigue estando en $PPAD$.

Outline

Punto fijo de Brouwer

De vuelta a lo continuo

Teorema de Brouwer

Toda función $f : D \to D$ continua sobre un dominio $D \subset \mathbb{R}^m$ compacto (cerrado y acotado) y convexo (sin hoyos) tiene un punto fijo, es decir, existe $x \in D$ tal que $f(x) = x$

Pero tenemos un problema, estamos trabajndo con funciones continuas que, posiblemente, tomen, valores irracionales, qué hacemos? Hint: discretiza tu problema.

Punto fijo de Brouwer

Lo que un computador quiere (puede) escuchar

Supongamos que nuestro dominio compacto y convexo es el cubo unitario $[0,1]^m$ y que nuestra función f está dada por un algoritmo eficiente Π_f que para todo punto x en el cubo, escrito en binario, computa $f(x)$. Además, f es Lipschitz continua, es decir, cumple con la propiedad

$$d(f(x), f(y)) \leq K \cdot d(x, y)$$

para alguna constante K y para todo $x, y \in [0,1]^m$.

Punto fijo de Brouwer

Lo que un computador quiere (puede) escuchar

Bajo estos supuestos tenemos la siguiente garantía

Lema

Para todo $\epsilon > 0$ existe un ϵ-aproximado punto fijo x tal que $d(x, f(x)) \leq \epsilon$ y cuyas coordenadas son multiplos enteros de 2^{-d} donde d depende de K, ϵ y la dimensión m

Si la función f no fuera Lipschitz continua estaríamos en serios problemas.

BROUWER como un problema computacional

Lo que un computador quiere (puede) escuchar

BROWER

Dado un algoritmo eficiente Π_f para evaluar $f : [0,1]^m \to [0,1]^m$, una constant K tal que f sea K-Lipschitz continua y un precisión deseada ϵ, encontrar un punto x tal que $d(x, f(x)) \leq \epsilon$

BROUWER $\leq_p$ SPERNER

BROUWER $\in$ PPAD

- Triangulación. Dividir el cuadrado unitario en cuadrados (mucho) más pequeños de lado igual a δ donde δ depende de ϵ y K. Luego dividir estos cuadrado en dos triángulos rectos iguales.
- Coloración. Coloreamos cada vértice x según la dirección en que f mapea x. Esto se puede medir, por ejemplo, con el ángulo que forman $f(x) - x$ y la horizontal

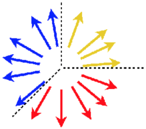

Figure: Una forma de asignar la coloración

Outline

Qué tan difícil es el problema NASH

La tan esperada reducción

Teorema

NASH $\in$ PPAD

El objetivo es demostrar que NASH $\leq_p$ BROUWER. Por suerte, Nash en su publicación original hizo algo parecido.

Demostración

Necesitamos contruir una función definida en el cubo unitario que sea Lipchitz continua y tal que si encontramos un ϵ-punto fijo, entonces encontramos un δ-equilibrio de Nash. Para eso necesitamos un par de definiciones.

Definición

Sea $x \in \Delta$. Para una jugador p y una estrategia s_p definimos la *ganacia* como

$$G_{p;s_p}(x) = \max\{u_p(s_p; x_p = -u_p(x), 0\}$$

En palabras, la ganacia es igual a al incremento del pago de p jugando la estrategia s_p si es que es positivo.

La reducción

Ahora construimos nuestra función de Nash $f : \Delta \to \Delta$ como sigue. Dado $x \in \Delta$, definimos $f(x) = y$, donde para cada jugador $p \in [n]$ y $s_p \in S_p$, tenemos

$$y_p(s_p) := \frac{x_p(s_p) + G_{p;s_p}(x)}{1 + \sum_{s'_p \in S_p} G_{p;s'_p}(x)}.$$

Claramente f es continua. Por otra parte, como Δ es un producto de simplices, es fácil ver que es convexo, cerrado y acotado. Nos falta probar que f sea Lipschitz.

El juego de los penales

	kick left	kick right
dive left	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
dive right	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

Table: El juego de los penales

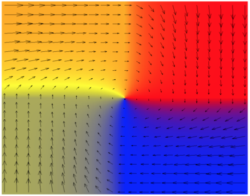

Figure: Como se vería la función de Nash en el juego de los penales

Demostración

Teorema (Daskalakis-Goldberg-Papadimitriou 2009)

Para cualquer par de perfiles de estrategias mixtas x, y,

$$|f(x) - f(y)|_\infty \leq (1 + 2u_{max} n \cdot m(m+1)) \cdot |x - y|_\infty$$

donde u_{max} es el valor absoluto máximo de algún pago en el juego, m es una cota superior para el número de estrategias de un jugador y n es el número de jugadores.

Para concluir la reducción, tenemos que establecer que la función f preserva la aproximación, esto es, si es que tenemos un ϵ-punto fijo, este corresponde a un $\delta(\epsilon)$-equilibrio de Nash.

Demostración

Teorema (Daskalakis-Goldberg-Papadimitriou 2009)

Sea f la función de Nash definida como arriba y x tal que $|f(x) - x|_\infty < \epsilon$. Entonces x es un δ-aproximado equilibrio de Nash del juego donde

$$\delta = m\sqrt{\epsilon(1 + m \cdot u_{max})}(1 + \sqrt{\epsilon(1 + m \cdot u_{max})}) \max(u_{max}, 1)$$

donde u_{max} es el valor absoluto máximo de algún pago en el juego y m es una cota superior para el número de estrategias de un jugador.

Esto concluye nuestra prueba de que $NASH \in PPAD$.

Referencias

Para ver en detalle las demostraciones

- C. Daskalakis, P. W. Goldberg and C. H. Papadimitriou. "The Complexity of Computing a Nash Equilibrium". *SIAM Journal on Computing*, 39(1): 195-259, 2009.
- J. Nash. "Noncooperative games"". *Ann. Math.*, 54:289–295, 1951.
- C. Daskalakis."Nash Equilibria: Complexity, Symmetries, and Approximation". 2009
- S. Kakutani. "A generalisation of Brouwer's fixed point theorem". *Duke Math. J.*, 7:457–459, 1941.
- Nisan, Noam. "The Complexity of Finding Nash Equilibria." Algorithmic Game Theory. Cambridge: Cambridge UP, 2007