

Algorithmic game theory - IIC3810

Patricio Ulloa

Pontificia Universidad Católica

peulloo@uc.cl

31 de mayo, 2016

- 1 Repaso: Clases de complejidad
 - TFNP
 - PPAD
- 2 Clases de complejidad
 - PPA y PLS
- 3 Algoritmo Lemke-Howson
- 4 El problema del Equilibrio de Nash
 - Definición
 - Lema de Sperner
 - Punto Fijo de Brouwer
 - Hacia la PPAD-completitud de NASH

Definición (TFNP)

Sea $P(x, y)$ un predicado. Π_P pertenece a la clase $TFNP$ si Π_P pertenece a FNP y además para todo $x \in \Sigma^*$ existe $y \in \Sigma^*$ tal que $P(x, y)$ se cumple.

Ejemplo

- $P(x, y) := x \in \mathbb{N}$, y es la factorización en primos de x .
- $P(f, x, y) := f := \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^{n-1}$, $f(x) = f(y)$.

Definición

Sean Π_P, Π_S en FNP . Decimos que Π_P es reducible a Π_S si existen funciones f y g en FP tal que para todo $x \in \Sigma^*$, $(x, g(y)) \in P$ si y sólo si $(f(x), y) \in S$.

¿Existirá algún problema $TFNP$ –Completo?

Repaso: Clases de complejidad

Cada problema Π_P en $TFNP$ debe tener algún tipo de "garantía" de su totalidad. La idea es clasificar los problemas en $TFNP$ de acorde a esta "garantía".

Lema (argumento de paridad para grafos dirigidos)

Si un grafo dirigido (finito) posee un nodo desbalanceado (cuyo grado de incidencia es distinto a su grado de salida), entonces posee otro nodo desbalanceado.

Definición

END OF THE LINE: Dados dos circuitos booleanos S y P , cada uno con n inputs y n outputs, tal que $S(P(0^n)) \neq 0^n$ y $P(S(0^n)) = 0^n$.
Encontrar $x \in \{0,1\}^n$ tal que $S(P(x)) \neq x \neq 0^n$ o $P(S(x)) \neq x$.

¿Cómo se utiliza el argumento de paridad?

Definición (*PPAD* alternativa)

Se define la clase *PPAD* como todos los problemas $\Pi_P \in TFNP$ tal que Π_P es reducible al problema END OF THE LINE.

Lema (argumento de paridad para grafos no dirigidos)

Todo grafo finito y no dirigido tiene una cantidad par de nodos de grado impar.

Definición

ODD DEGREE NODE: Dado un circuito booleano $C : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^{nd}$ que entrega a lo más d nodos de output, para d constante. El circuito C induce un grafo donde (v_1, v_2) es arco si y solo si $v_2 \in C(v_1) \wedge v_1 \in C(v_2)$. Si el nodo 0^n tiene grado par, retornar sí. De lo contrario, encontrar $x \neq 0^n$ de grado impar.

Definición (PPA)

Se define la clase PPA como todos los problemas $\Pi_P \in TFNP$ tal que Π_P es reducible al problema ODD DEGREE NODE.

¿Cuál es la relación con PPAD?

Lema

Todo grafo dirigido y acíclico tiene un sumidero.

Definición

Sean el circuito booleano C anterior y una función $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$. C y F inducen un grafo dirigido donde (v_1, v_2) es arco si y solo si $v_2 \in C(v_1) \wedge F(v_2) \geq F(v_1)$.

FIND SINK: Dado (C, F) , encontrar x tal que $\forall y \in C(x)$, se tiene $F(x) \geq F(y)$.

Definición (*PLS*)

Se define la clase *PLS* como todos los problemas $\Pi_P \in TFNP$ tal que Π_P es reducible al problema FIND SINK.

¿Cuál es la relación entre *PLS* y *PPAD*?

¿Cuál de las clases anteriores es más intuitiva para representar el equilibrio de Nash?

¿Para qué sirve?

- Es un algoritmo que permite encontrar un equilibrio de Nash mixto para 2 jugadores de manera exacta.
- Está diseñado para juegos simétricos, pero se puede extender para juegos no simétricos.

Algoritmo Lemke-Howson

Dado un juego simétrico con n estrategias representado por una matriz A . Se define la región $R \subset \mathbb{R}^n$ como los puntos z tal que:

- $z_i \geq 0$ para $i \in \{1, \dots, n\}$
- $A_i z \leq 1$ para $i \in \{1, \dots, n\}$

Definición (Representación)

- Se dice que la estrategia i está representada en z si $z_i = 0$ o $A_i z = 1$.
- Se dice que la estrategia i está sobrerrepresentada en z si $z_i = 0$ y $A_i z = 1$.

El algoritmo busca puntos donde todas las estrategias estén representadas, manteniendo una lista de n igualdades. ¿Por qué?

Algoritmo Lemke-Howson

Input: Matriz A que representa un juego simétrico de n estrategias mixtas.

Output: $x \in \mathbb{R}^n$ que representa un equilibrio de Nash para el juego de A

¿Cómo funciona el algoritmo?

- 1 Inicializa con $z=0$, con una lista de n igualdades $z_i = 0$ donde las n estrategias están representadas.
- 2 Elige $i \in \{1, \dots, n\}$, luego rompe la igualdad $z_i = 0$, redefiniendo z a otro vértice que cumpla todo el resto de las igualdades.
- 3 Si las n estrategias están representadas en z , ir al paso 5. De lo contrario, ir al paso 4.

Algoritmo Lemke-Howson

- 4 Dado que hay una estrategia k sobrerrepresentada, se rompe la igualdad más antigua que represente a la estrategia k . Se redefine z a otro vértice que cumpla todo el resto de las igualdades. Volver al paso 3.
- 5 Define $x_i = \frac{z_i}{\sum_{i=1}^n z_i}$ y retorna x .

¿Qué problema hay con este algoritmo?

Ejemplo

El juego representado por la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

El problema del Equilibrio de Nash

A continuación, definiremos el problema NASH:

Definición

NASH: Dado un juego $\mathcal{G}$ y una cota de error ϵ , encontrar un equilibrio ϵ -aproximado para el juego $\mathcal{G}$.

Nuestra intención es demostrar que este problema es PPAD-completo. Para esto introduciremos dos resultados importantes y problemas computacionales asociados.

El problema del Equilibrio de Nash

Dado un mallado triangulizado de paso δ para el cubo unitario $[0, 1]^n$ y los colores $\{0, \dots, n\}$, se define la siguiente propiedad P :

Definición(Propiedad P)

- Las caras $x_i = 0$ del cubo, no contienen vertices con el color i , para $i \in \{1, \dots, n\}$.
- Las caras $x_i = 1$ del cubo no contienen vertices con el color 0, para $i \in \{1, \dots, n\}$.

Lema(Sperner)

Todo mallado triangulizado del cubo unitario n -dimensional que cumpla la propiedad P contiene un n -simplex con sus $n + 1$ vértices de distinto color.

El problema del Equilibrio de Nash

Idea de la demostración:

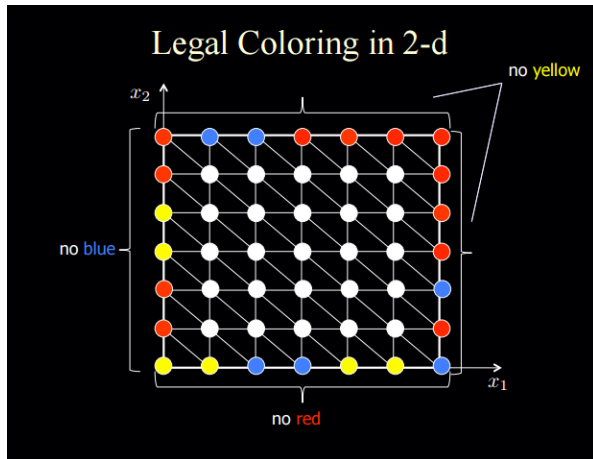


Figura: Coloración parcial cumpliendo P.

El problema del Equilibrio de Nash

Idea de la demostración:

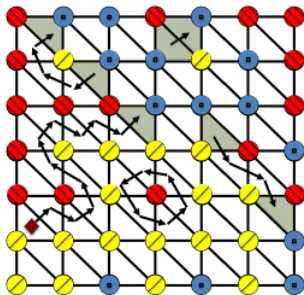


Figura: Un ejemplo en $[0, 1]^2$.

El problema del Equilibrio de Nash

Se define el problema computacional asociado a este lema, restringiendo $\delta = 2^{-m}$ y utilizando m bits para cada coordenada de algún punto en el mallado del cubo.

Definición

SPERNER: Dado un circuito C de nm inputs, donde C retorna un color. Encontrar $x \in \{0, 1\}^{mn}$ que viola la propiedad P o un simplex n -dimensional con $n+1$ colores.

El problema del Equilibrio de Nash

Además, se utiliza el teorema de punto fijo de Brouwer para definir otro problema.

Punto fijo de Brouwer

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un compacto convexo y $f : D \rightarrow D$ continua, entonces existe $x \in D$ tal que $f(x) = x$.

Definición

BROUWER: Dada M maquina de Turing que evalúa eficientemente $f: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$, c constante de Lipschitz asociada a f y ϵ cota de error, calcular un punto fijo con error ϵ .

El problema del Equilibrio de Nash

Queremos demostrar que NASH es un problema PPAD-completo. Se procederá demostrando que existen reducciones en ambas direcciones para los problemas END OF THE LINE y NASH. Utilizaremos los problemas SPERNER y BROUWER como reducciones intermedias.

El problema del Equilibrio de Nash

Ahora, se reduce SPERNER a END OF THE LINE. Para hacer la reducción, se definen los siguientes conceptos:

Definición

- Un simplex se dice colorido si contiene a lo menos un vértice de cada color $0, 2, \dots, n$ y tiene vértices coloreados con 1.
- Una cara de un simplex se dice colorida si tiene sus n vertices coloreados uno de cada color $0, 2, \dots, n$.
- Un simplex se dice pancromático si tiene exactamente un vértice de cada color $0, 1, 2, \dots, n$.

El problema del Equilibrio de Nash

La reducción consiste en crear un gráfico para END OF THE LINE que sea isomorfo al grafo dirigido construido en la demostración del lema de Sperner.

Se toma un n apropiado para hacer una inyección del conjunto de los simplex en $\{0, 1\}^n$. Esta inyección debe mapear el simplex inicial T^* a 0^n .

El problema del Equilibrio de Nash

Entonces, la función de reducción computa P y S tales que:

- $P(0^n) = 0^n$, $S(0^n)$ calcula la representación del simplex que comparte una cara colorida con T^* .
- Si $T \in \{0,1\}^n$ enumera un simplex que no es colorido ni pancromático, $P(T) = T$ y $S(T) = 0^n$. Esto asegura que T sea un punto aislado.
- Si T comparte una cara colorida con T' y el signo de la permutación de la cara colorida entre ellos es $+1$, se tiene $S(T) = T'$. En caso que el signo sea -1 , se tiene $P(T) = T'$.

Se concluye finalmente que SPERNER $\in$ PPAD.



C. H. Papadimitriou (1994)

On the complexity of the Parity Argument and Other Inefficient Proof of Existence
Journal of Computer and System Sciences 48, 498 – 532.



N. Nisan et al. (2007)

Algorithmic Game Theory



C. Daskalakis (2009)

Nash Equilibria: Complexity, Symmetries, and Approximation
CSAIL, MIT



C.E. Lemke y J.T. Howson Jr. (1964)

Equilibrium points of bimatrix games

Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics 12, 413-423