

Algorithmic game theory - IIC3810

María Ignacia Fierro

Pontificia Univesidad Católica de Chile

26 de mayo, 2016

1 Introducción

- Historia
- Juegos

2 Modelamiento

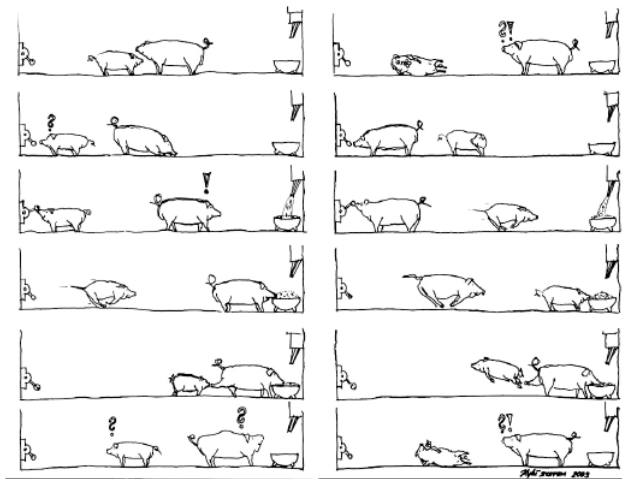
- Juegos estratégicos
- Estrategias Mixtas
- Juegos extensivos con información perfecta

3 Implicancias de la teoría de juegos

Un poco de historia

- James Waldegrave (1713): solución Mínima de estrategia mixta a un juego de cartas.
- Antoine Augustin Cournot (1838): Análisis de un duopolio, versión restringida del Equilibrio de Nash.
- John von Neumann y Oskar Morgenstern (1944): *Theory of Games and Economic Behavior* (juegos cooperativos)
- Albert W. Tucker (1950): Dilema del prisionero.
- John Forbes Nash (1950): Juegos no cooperativos, equilibrio de Nash.
- Reinhard Selten (1965): Solución, equilibrios perfectos de subjuegos.
- John Harsanyi (1967): Juegos Bayesianos.
- John Maynard Smith (1982): Estrategia evolutivamente estable.
- John Harsanyi, John Forbes Nash y Reinhard Selten (1994): Ganan premio Nobel de economía.
- Lloyd Stowell Shapley y Alvin E. Roth (2012) Ganan premio Nobel de economía.

Motivación:



Definición

Un juego es una descripción de la interacción estratégica entre dos o más individuos, que toman decisiones, de acuerdo a reglas preestablecidas y sus intereses, conduciendo a un resultado (solución).

Supuestos básicos: individuos racionales, que razonan estratégicamente.

Un juego se compone de:

- Un conjunto A de acciones o decisiones.
- Un conjunto C de posibles consecuencias.
- Una función $g : A \rightarrow C$, que relaciona cada acción con una consecuencia
- Una relación completa, transitiva, binaria y reflexiva, llamada relación de preferencia, $\succsim$ sobre el conjunto C .

Más notación y definiciones

- Decisión racional: $g(a^*) \succeq g(a) \quad \forall a \in B$. Donde $B \subseteq A$
- N denomina al conjunto de jugadores
- "Perfil" $(x_i)_{i \in N}$ es una colección de valores que toma una variable para cada uno de los jugadores
- $x_{-i} = (x_j)_{j \in N \setminus i}$
- Dado x_{-i} , se tiene que $(x_{-i}, x_i) = (x_i)_{i \in N}$
- Una relación $\succeq$ es *quasi-cóncava*, si para cada $b \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $\{a \in \mathbb{R}^n : a \succeq b\}$ es convexo.

Ejemplo:

En el cachipún, cada jugador tiene tres posibles estrategias, o decisiones: piedra, papel, tijera. Luego, en un juego de dos personas, los perfiles pueden estar dados por:

$(\text{piedra}, \text{piedra}), (\text{piedra}, \text{papel}), (\text{piedra}, \text{tijera}), (\text{papel}, \text{piedra}), \dots$

Un juego estratégico (o juego en forma normal) $\langle N, (A_i), (\succsim_i) \rangle$ se define como:

- Un conjunto de jugadores, N , finito.
- Para cada jugador $i \in N$, un conjunto no vacío, A_i de acciones.
- Para cada jugador, $i \in N$, una relación de preferencia $\succsim_i$ de acciones sobre $A = \times_{j \in N} A_j$

Si las preferencias de un jugador no están determinadas por las acciones, sino que por las consecuencias de estas, entonces se define el conjunto C y la función g como antes.

Ejemplo:

			
		<i>Press the lever</i>	<i>Sit by the trough</i>
	<i>Press the lever</i>	$(8, -2)$	$\rightarrow$ $(3, 5)$
	<i>Sit by the trough</i>	$(10, -2)$	$\rightarrow$ $(0, 0)$

Equilibrio de Nash en juegos estratégicos

Denota una "solución" para un juego, en la cual cada jugador adopta su mejor estrategia. Formalmente:

Equilibrio de Nash en juegos estratégicos

Corresponde a un perfil $a^* \in A$ de acciones, con la propiedad de que para cada jugador $i \in N$, se tiene que

$$(a_{i-1}^*, a_i^*) \succeq (a_{i-1}^*, a_i) \quad \forall a_i \in A_i$$

Equilibrio de Nash en juegos estratégicos

Una definición alternativa del equilibrio de Nash:

Función de mejor respuesta

Para cualquier $a_{-i} \in A_{-i}$, se define el conjunto de mejores acciones del jugador i , dado a_{-i} como:

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : (a_{-i}, a_i) \succeq_i (a_{-i}, a'_i) \forall a'_i \in A_i\}$$

A todo el conjunto se le llama función de mejor respuesta del jugador i . Luego, un equilibrio de Nash es un perfil a^* de acciones para las cuales

$$a_i^* \in B_i(a_{-i}^*) \quad \forall i \in N$$

Proposición

El juego estratégico $\langle N, (A_i), (\succsim_i) \rangle$ tiene un equilibrio de Nash, si para cada jugador $i \in N$:

- El conjunto A_i de acciones del jugador i es un subespacio no vacío, compacto y convexo del espacio Euclídeo.
- La relación de preferencia $\succsim_i$ de cada jugador es continua y *quasi-cóncava* sobre A_i

Demostración: Teorema del punto fijo de Brouwer (próximamente)

- Se modela un equilibrio en el cual las decisiones de los participantes son no deterministas.
- Las relaciones de preferencia $\succsim_i$ son reemplazadas por el valor esperado de funciones de pago $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, que representan las preferencias del jugador i sobre un conjunto de loterías sobre A .
- $\Delta(A_i)$ es el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre A_i . A cada elemento de este conjunto se le denomina **estrategia mixta del jugador i** . En contraste, una **estrategia pura** es un miembro de A_i .
- Un perfil $(\alpha)_{j \in N}$ de estrategias mixtas induce una distribución de probabilidad sobre A .

Extensión Mixta

La extensión mixta del juego $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ es el juego estratégico $\langle N, \Delta(A_i), (U_i) \rangle$, donde $\Delta(A_i)$ es el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre A_i y $U_i : \times_{j \in N} \Delta A_j \rightarrow \mathbb{R}$ asigna a cada $\alpha \in \times_{j \in N} \Delta A_j$ el valor esperado bajo u_i de la lotería sobre A , inducida por α . Luego U_i es en otras palabras:

$$U_i(\alpha) = \sum_{a \in A} (\prod_{j \in N} \alpha_j(a_j)) u_i(a)$$

**La función $U_i(\alpha)$ es lineal*

Estrategias Mixtas

Equilibrio de Nash para estrategias mixtas

Corresponde al equilibrio de la extensión mixta del juego estratégico.

Proposición

Cada juego estratégico tiene un equilibrio de Nash mixto.

Demostración.

Lema

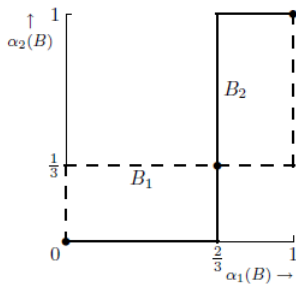
Sea $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ un juego estratégico finito. Entonces $\alpha^* \in \times_{j \in N} \Delta(A_j)$ es un equilibrio de Nash mixto para G , si y sólo si para cada jugador $i \in N$, cada estrategia pura en el soporte de α_i^* es la mejor respuesta para α_{-i}^* .

Demostración.

En consecuencia, cada acción en el soporte de un equilibrio en estrategias mixtas de un jugador, conlleva el mismo pago.

Ejemplo:

	<i>Bach</i>	<i>Stravinsky</i>
<i>Bach</i>	2, 1	0, 0
<i>Stravinsky</i>	0, 0	1, 2



Juegos extensivos con información perfecta

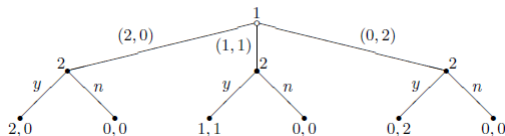
Juego extensivo con información perfecta

Se define como la tupla $\Gamma = \langle N, H, P, \succsim_i \rangle$, donde :

- N es el conjunto de jugadores.
- H es el conjunto de sucesiones que satisfacen:
 - La sucesión vacía, $\emptyset$ pertenece a H .
 - Si $(a^k)_{k=1\dots K} \in H$, (donde K puede ser infinito) y $L < K$, entonces $(a^k)_{k=1\dots L} \in H$.
 - Si una sucesión infinita $(a^k)_{k=1}^\infty$ satisface que $(a^k)_{k=1\dots L} \in H$ para cada $L \in \mathbb{Z}$, entonces $(a^k)_{k=1}^\infty \in H$.
- Posee además conjunto Z de *historias terminales*
- Cuenta con una función P , que asigna a cada historia no terminal un miembro de N
- Para cada jugador $i \in N$ una relación de preferencia $\succsim_i$ sobre Z

Juegos extensivos con información perfecta

Ejemplo: Dos personas comparten dos objetos idénticos y deciden dónde ubicarlos. Una de ellas propone una ubicación para cada uno y el otro miembro acepta (y) o rechaza la proposición (n)



Acá:

- $N = \{1, 2\}$
- $H := \{\emptyset, (2, 0), (1, 1), (0, 2), ((2, 0)y), ((2, 0), n), ((1, 1), y), ((1, 1), n), ((0, 2), y), ((0, 2), n), \}$
- $P(\emptyset) = 1$ y $P(h) = 2 \forall h \neq \emptyset$

Estrategia

Corresponde a una función que asigna una acción $A(h)$ a cada historia no terminal $h \in H \setminus Z$ para la cual $P(h) = i$

Resultado

Para cada estrategia, se define el perfil $s = (s_i)_{i \in N}$ en el juego extensivo $\langle N, H, P, (\succsim_i) \rangle$. Para cada estrategia se define $O(s)$ como la historia terminal que resulta cuando cada jugador $i \in N$ sigue los pasos precedentes a s_i . Es decir, $O(s)$ es una historia $(a^1, \dots, a^k) \in Z$, tal que para $0 \leq k \leq K$ se tiene $s_{P(a^1, \dots, a^k)}(a^1, \dots, a^k) = a^{k+1}$.

Juegos extensivos con información perfecta

Equilibrio de Nash

Es un perfil de estrategias, s^* tal que para cada jugador $i \in N$ se tiene:

$$O(s_{-i}^*, s_i^*) \succeq_i O(s_{-i}^*, s_i) \quad \forall s_i \text{ del jugador } i \in N$$

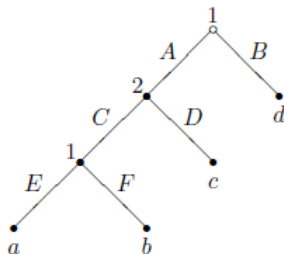
Definición alternativa:

Forma Estratégica

La forma estratégica de un juego extensivo con información perfecta $(\Gamma = \langle N, H, P, (\succeq_i) \rangle)$ es el juego estratégico $\langle N, H, (\succeq'_i) \rangle$ en el cual para cada jugador $i \in N$

- S_i es el set de estrategias del jugador i en Γ
- $\succeq'_i$ es definido como $s_i \succeq'_i s'$, si y solo si $O(s) \succeq_i O(s')$ para cada $s \in \times_{i \in N} S_i$ y $s' \in \times_{i \in N} S_i$

Juegos extensivos con información perfecta



	C	D
AE	a	c
AF	b	c
BE	d	d
BF	d	d

	C	D
AE	a	c
AF	b	c
B	d	d

Inducción hacia atrás

Decimos que la estrategia conjunta $\hat{s} = (\hat{s}_1 \dots \hat{s}_N)$ es una estrategia de inducción hacia atrás en un juego de información perfecta, si dicha estrategia puede obtenerse de la siguiente forma:

- Sea k el nodo $P(h) = i$ que precede inmediatamente a un nodo terminal $z \in Z$
- $\hat{s}_i(k)$ maximiza el pago que tiene el jugador i entre las posibilidades de ese nodo
- El nodo k se convierte en un nodo terminal, donde los pagos son los que determina la estrategia $\hat{s}(k)$
- Repetir los pasos anteriores hasta llegar al nodo $\emptyset$

Juegos extensivos con información perfecta

Teorema de Zermelo-Kuhn

Un juego finito de información perfecta tiene un equilibrio de Nash en estrategia pura.

Teorema de Kuhn

Si s es una estrategia de inducción hacia atrás en un juego de información perfecta entonces s es un equilibrio de Nash.

Ejemplo en pizarra

Implicancias de la teoría de juegos

- Equilibrio de Nash en la vida cotidiana
- Computabilidad del Equilibrio de Nash

-  OSBORNE, Martin J.; RUBINSTEIN, Ariel. A course in game theory. MIT press, 1994.
-  PERSIANO, Giuseppe (ed.). Algorithmic Game Theory. Springer, 2011.
-  HYKŠOVÁ, Magdalena. Several milestones in the history of game theory. in Jubiläen—Chance oder Plage, 2004, p. 49-56.
-  "Juegos en forma extensiva" de Alvaro J. Riascos Villegas
-  <http://www2.um.edu.uy/dubraj/documentos/juegos.pdf>