

La jerarquía polinomial

Podemos generalizar las definiciones anteriores considerando una clase de complejidad $\mathcal{C}$.

La jerarquía polinomial

Podemos generalizar las definiciones anteriores considerando una clase de complejidad $\mathcal{C}$.

Definición

► $PTIME^{\mathcal{C}}: \bigcup_{A \in \mathcal{C}} PTIME^A$

► $NP^{\mathcal{C}}: \bigcup_{A \in \mathcal{C}} NP^A$

La jerarquía polinomial

Usamos la generalización anterior para definir la jerarquía polinomial.

La jerarquía polinomial

Usamos la generalización anterior para definir la jerarquía polinomial.

Definición (Jerarquía Polinomial)

La jerarquía polinomial

Usamos la generalización anterior para definir la jerarquía polinomial.

Definición (Jerarquía Polinomial)

$$\Sigma_0^P = PTIME$$

La jerarquía polinomial

Usamos la generalización anterior para definir la jerarquía polinomial.

Definición (Jerarquía Polinomial)

$$\Sigma_0^P = PTIME$$

$$\Sigma_{n+1}^P = NP^{\Sigma_n^P} \quad n \geq 0$$

La jerarquía polinomial

Usamos la generalización anterior para definir la jerarquía polinomial.

Definición (Jerarquía Polinomial)

$$\Sigma_0^P = PTIME$$

$$\Sigma_{n+1}^P = NP^{\Sigma_n^P} \quad n \geq 0$$

$$\Delta_{n+1}^P = PTIME^{\Sigma_n^P} \quad n \geq 0$$

La jerarquía polinomial

Usamos la generalización anterior para definir la jerarquía polinomial.

Definición (Jerarquía Polinomial)

$$\Sigma_0^P = PTIME$$

$$\Sigma_{n+1}^P = NP^{\Sigma_n^P} \quad n \geq 0$$

$$\Delta_{n+1}^P = PTIME^{\Sigma_n^P} \quad n \geq 0$$

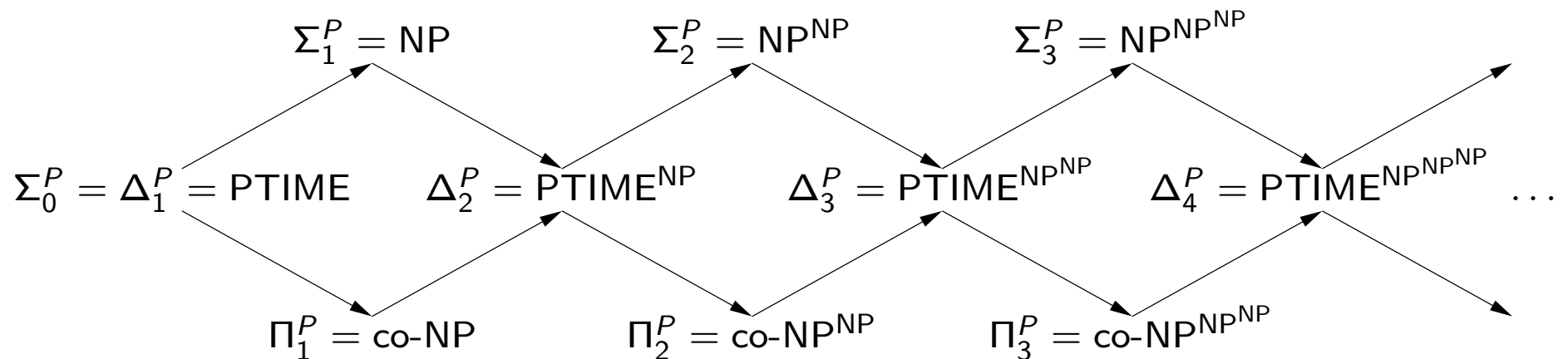
$$\Pi_{n+1}^P = co-\Sigma_{n+1}^P \quad n \geq 0$$

La jerarquía polinomial

¿Cómo se ve la jerarquía polinomial en una figura?

La jerarquía polinomial

¿Cómo se ve la jerarquía polinomial en una figura?



La jerarquía polinomial y EXPTIME

Definición

$$PH = \bigcup_{k \geq 0} \Sigma_k^P$$

La jerarquía polinomial y EXPTIME

Definición

$$PH = \bigcup_{k \geq 0} \Sigma_k^P$$

¿Cuál es la relación entre PH y EXPTIME?

La jerarquía polinomial y EXPTIME

Definición

$$PH = \bigcup_{k \geq 0} \Sigma_k^P$$

¿Cuál es la relación entre PH y EXPTIME?

- ▶ $PH \subseteq EXPTIME$

La jerarquía polinomial y EXPTIME

¿Puede ser cierto que $\text{EXPTIME} \subseteq \text{PH}$?

La jerarquía polinomial y EXPTIME

¿Puede ser cierto que $\text{EXPTIME} \subseteq \text{PH}$?

- ▶ Esto implicaría que PH tiene problemas completos

La jerarquía polinomial y EXPTIME

¿Puede ser cierto que $\text{EXPTIME} \subseteq \text{PH}$?

- ▶ Esto implicaría que PH tiene problemas completos

¿Puede tener problemas completos PH?

La jerarquía polinomial y EXPTIME

¿Puede ser cierto que $\text{EXPTIME} \subseteq \text{PH}$?

- ▶ Esto implicaría que PH tiene problemas completos

¿Puede tener problemas completos PH?

- ▶ Cada clase Σ_k^P es cerrada bajo $\leq_m^P$
 - ▶ Si $L_1 \leq_m^P L_2$ y $L_2 \in \Sigma_k^P$, entonces $L_1 \in \Sigma_k^P$

La jerarquía polinomial y EXPTIME

¿Puede ser cierto que $\text{EXPTIME} \subseteq \text{PH}$?

- ▶ Esto implicaría que PH tiene problemas completos

¿Puede tener problemas completos PH?

- ▶ Cada clase Σ_k^P es cerrada bajo $\leq_m^P$
 - ▶ Si $L_1 \leq_m^P L_2$ y $L_2 \in \Sigma_k^P$, entonces $L_1 \in \Sigma_k^P$
- ▶ Si PH tiene un problema completo, entonces la jerarquía polinomial colapsa a algún nivel finito

La jerarquía polinomial y EXPTIME

¿Puede ser cierto que $\text{EXPTIME} \subseteq \text{PH}$?

- ▶ Esto implicaría que PH tiene problemas completos

¿Puede tener problemas completos PH?

- ▶ Cada clase Σ_k^P es cerrada bajo $\leq_m^P$
 - ▶ Si $L_1 \leq_m^P L_2$ y $L_2 \in \Sigma_k^P$, entonces $L_1 \in \Sigma_k^P$
- ▶ Si PH tiene un problema completo, entonces la jerarquía polinomial colapsa a algún nivel finito

Proposición

Si la jerarquía polinomial no colapsa a algún nivel finito, entonces $\text{PH} \subsetneq \text{EXPTIME}$.

El colapso de la jerarquía polinomial: un resultado fundamental

Teorema

Para $k \geq 1$:

- (a) Si $\Sigma_k^P = \Pi_k^P$, entonces $PH = \Sigma_k^P$
- (b) Si $\Sigma_k^P = \Delta_k^P$, entonces $PH = \Delta_k^P$

Problemas completos en la jerarquía polinomial

El lenguaje QBF_i ($i \geq 1$) está formado por todas las fórmulas proposicionales cuantificadas que son válidas y de la forma:

$$\begin{aligned} & \exists x_{1,1} \cdots \exists x_{1,m_1} \\ & \forall x_{2,1} \cdots \forall x_{2,m_2} \\ & \exists x_{3,1} \cdots \exists x_{3,m_3} \\ & \quad \dots \\ & Q_i x_{i,1} \cdots Q_i x_{i,m_i} \varphi \end{aligned}$$

donde:

- ▶ $Q_i = \exists$ si i es impar y $Q_i = \forall$ si i es par
- ▶ φ es una fórmula proposicional sobre las variables $x_{1,1}, \dots, x_{1,m_1}, \dots, x_{i,1}, \dots, x_{i,m_i}$

Un problema completo para Σ_k^P

La clase de problemas $\{QBF_i\}_{i \geq 1}$ es adecuada para representar la jerarquía polinomial.

Teorema

Para cada $k \geq 1$, QBF_k es Σ_k^P -completo.

Otro problema completo para Σ_2^P

Teorema

$\overline{EQUIV}$ es Σ_2^P -completo.

- ▶ Se deduce que $EQUIV$ es Π_2^P -completo

Otro problema completo para Σ_2^P

Teorema

$\overline{EQUIV}$ es Σ_2^P -completo.

- Se deduce que $EQUIV$ es Π_2^P -completo

Hay problemas naturales que son completos para los distintos niveles de la jerarquía polinomial.