

La jerarquía polinomial

Podemos generalizar las definiciones anteriores considerando una clase de complejidad $\mathcal{C}$.

Definición

► $PTIME^{\mathcal{C}}: \bigcup_{A \in \mathcal{C}} PTIME^A$

► $NP^{\mathcal{C}}: \bigcup_{A \in \mathcal{C}} NP^A$

La jerarquía polinomial

Usamos la generalización anterior para definir la jerarquía polinomial.

Definición (Jerarquía Polinomial)

$$\Sigma_0^P = PTIME$$

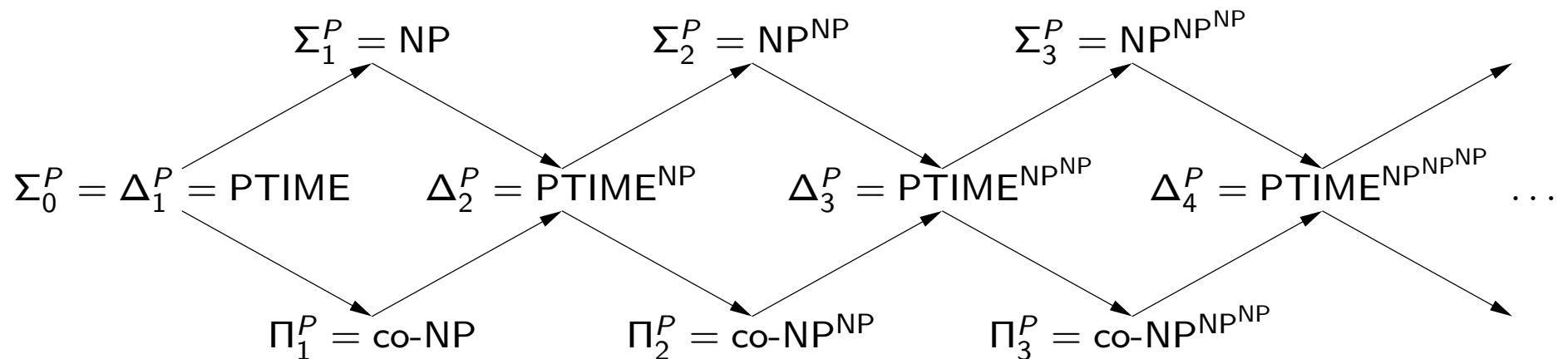
$$\Sigma_{n+1}^P = NP^{\Sigma_n^P} \quad n \geq 0$$

$$\Delta_{n+1}^P = PTIME^{\Sigma_n^P} \quad n \geq 0$$

$$\Pi_{n+1}^P = co-\Sigma_{n+1}^P \quad n \geq 0$$

La jerarquía polinomial

¿Cómo se ve la jerarquía polinomial en una figura?



La jerarquía polinomial y EXPTIME

Definición

$$PH = \bigcup_{k \geq 0} \Sigma_k^P$$

¿Cuál es la relación entre PH y EXPTIME?

- $PH \subseteq EXPTIME$

La jerarquía polinomial y EXPTIME

¿Puede ser cierto que $\text{EXPTIME} \subseteq \text{PH}$?

- ▶ Esto implicaría que PH tiene problemas completos

¿Puede tener problemas completos PH?

- ▶ Cada clase Σ_k^P es cerrada bajo $\leq_m^P$
 - ▶ Si $L_1 \leq_m^P L_2$ y $L_2 \in \Sigma_k^P$, entonces $L_1 \in \Sigma_k^P$
- ▶ Si PH tiene un problema completo, entonces la jerarquía polinomial colapsa a algún nivel finito

Proposición

Si la jerarquía polinomial no colapsa a algún nivel finito, entonces $\text{PH} \subsetneq \text{EXPTIME}$.

El colapso de la jerarquía polinomial: un resultado fundamental

Teorema

Para $k \geq 1$:

- (a) Si $\Sigma_k^P = \Pi_k^P$, entonces $PH = \Sigma_k^P$
- (b) Si $\Sigma_k^P = \Delta_k^P$, entonces $PH = \Delta_k^P$

Problemas completos en la jerarquía polinomial

El lenguaje QBF_i ($i \geq 1$) está formado por todas las fórmulas proposicionales cuantificadas que son válidas y de la forma:

$$\begin{aligned} &\exists x_{1,1} \cdots \exists x_{1,m_1} \\ &\forall x_{2,1} \cdots \forall x_{2,m_2} \\ &\exists x_{3,1} \cdots \exists x_{3,m_3} \\ &\quad \dots \\ &Q_i x_{i,1} \cdots Q_i x_{i,m_i} \varphi \end{aligned}$$

donde:

- ▶ $Q_i = \exists$ si i es impar y $Q_i = \forall$ si i es par
- ▶ φ es una fórmula proposicional sobre las variables $x_{1,1}, \dots, x_{1,m_1}, \dots, x_{i,1}, \dots, x_{i,m_i}$

Un problema completo para Σ_k^P

La clase de problemas $\{QBF_i\}_{i \geq 1}$ es adecuada para representar la jerarquía polinomial.

Teorema

Para cada $k \geq 1$, QBF_k es Σ_k^P -completo.

Otro problema completo para Σ_2^P

Teorema

$\overline{EQUIV}$ es Σ_2^P -completo.

- Se deduce que $EQUIV$ es Π_2^P -completo

Hay problemas naturales que son completos para los distintos niveles de la jerarquía polinomial.