

Segundo ingrediente: una caracterización de Σ_2^P relativizado

Dado: Lenguaje A sobre un alfabeto Σ

Proposición

Sea L un lenguaje sobre Σ . Entonces L está en NP^A si y sólo si existe una MT determinista M^A y un polinomio $p(n)$ tales que M^A funciona en tiempo polinomial, M^A tiene un oráculo para A y para todo $u \in \Sigma^$:*

$$u \in L \text{ si y sólo si } (\exists v \in \Sigma^*, |v| = p(|u|)) : M^A \text{ acepta } (u, v)$$

Ejercicio

Demuestre la proposición.

Segundo ingrediente: una caracterización de Σ_2^P relativizado

Proposición

Sea L un lenguaje sobre Σ . Entonces L está en $\Sigma_2^P(A)$ si y sólo si existe una MT determinista M^A y un polinomio $p(n)$ tales que M^A funciona en tiempo polinomial, M^A tiene un oráculo para A y para todo $u \in \Sigma^$:*

$u \in L$ si y sólo si

$(\exists v_1 \in \Sigma^, |v_1| = p(|u|))(\forall v_2 \in \Sigma^*, |v_2| = p(|u|)) : M^A \text{ acepta } (u, v_1, v_2)$*

Ejercicio

Demuestre la proposición.

Un tercer ingrediente: un lema de amplificación para AM

Sea M una MT probabilística **no determinista** con alfabeto de entrada Σ

De la misma forma que para el caso determinista, dado $w \in \Sigma^*$ y $s \in \{0, 1\}^*$ decimos que $M(w, s)$ es incorrecto si:

$$\begin{aligned} &w \in L \text{ y } M(w, s) \text{ no acepta} \\ &\quad \text{o} \\ &w \notin L \text{ y } M(w, s) \text{ acepta} \end{aligned}$$

Nótese que usamos la noción de aceptación para MT no deterministas

Vamos a utilizar esta noción en el lema de amplificación para AM

Un tercer ingrediente: un lema de amplificación para AM

Lema

Sea L un lenguaje sobre un alfabeto Σ y $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ un polinomio. Si $L \in AM$, entonces existe una MT probabilística no determinista M tal que $t_M(n)$ es $O(n^k)$ y para cada $w \in \Sigma^$ con $|w| = n$:*

$$Pr_s(M(w, s) \text{ es incorrecto}) \leq \frac{1}{2^{p(n)}}$$

Ejercicio

Demuestre la proposición.

Solución del ejercicio

Como $L \in \text{AM}$, existe una MT probabilística **no determinista** M_1 tal que $t_{M_1}(n)$ es $O(n^{k_1})$ y para cada $w \in \Sigma^*$:

$$\Pr_s(M_1(w, s) \text{ es incorrecto}) \leq \frac{1}{4}$$

Utilizamos la MT M_1 para construir la MT M mencionada en el enunciado del lema.

Solución del ejercicio

La MT M recibe como entrada $w \in \Sigma^*$, $s_1 \in \{0, 1\}^*$, $\dots$, $s_{2\ell+1} \in \{0, 1\}^*$ tales que $|s_1| = \dots = |s_{2\ell+1}| = t_{M_1}(|w|)$

- El valor de ℓ va a ser determinado al final de la demostración

Con entrada $(w, s_1, \dots, s_{2\ell+1})$ la MT M realiza los siguientes pasos:

1. $t = 0$
2. **for** $i = 1$ **to** $2\ell + 1$ **do**
 - 2.1 adivine una ejecución de $M_1(w, s_i)$
 - 2.2 **if** la ejecución acepta **then** $t = t + 1$
3. **if** $t > \ell$ **entonces** acepta

Solución del ejercicio

Vamos a demostrar que:

$$\Pr_{s_1, \dots, s_{2\ell+1}}(M(w, s_1, \dots, s_{2\ell+1}) \text{ es incorrecto}) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^\ell$$

Suponemos que

$$\Pr_s(M_1(w, s) \text{ es incorrecto}) = p$$

con $p \leq \frac{1}{4}$

Si $p = 0$, entonces tenemos que:

$$\Pr_{s_1, \dots, s_{2\ell+1}}(M(w, s_1, \dots, s_{2\ell+1}) \text{ es incorrecto}) = 0 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^\ell$$

Solución del ejercicio

Suponemos entonces que $p > 0$

Tenemos que:

$$\Pr_{s_1, \dots, s_{2\ell+1}}(M(w, s_1, \dots, s_{2\ell+1}) \text{ es incorrecto}) = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} (1-p)^i p^{2\ell+1-i}$$

Solución del ejercicio

Como $0 < p \leq \frac{1}{4}$, tenemos que $1 \leq \frac{1-p}{p}$

Entonces para $i \in \{0, \dots, \ell\}$ tenemos que:

$$\begin{aligned}(1-p)^i p^{2\ell+1-i} &\leq (1-p)^i p^{2\ell+1-i} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\ell-i} \\ &= (1-p)^\ell p^{\ell+1}\end{aligned}$$

Solución del ejercicio

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} (1-p)^i p^{2\ell+1-i} &\leq \sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} (1-p)^{\ell} p^{\ell+1} \\ &= (1-p)^{\ell} p^{\ell+1} \sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} \\ &\leq (1-p)^{\ell} p^{\ell+1} 2^{2\ell+1}\end{aligned}$$

El mayor valor de la función $f(x) = (1-x)x$ en el intervalo $(0, \frac{1}{4}]$ se alcanza en $x = \frac{1}{4}$

► Concluimos que $(1-p)p \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$

Solución del ejercicio

Concluimos que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} (1-p)^i p^{2\ell+1-i} &\leq (1-p)^\ell p^{\ell+1} 2^{2\ell+1} \\ &= ((1-p)p)^\ell p 2^{2\ell+1} \\ &\leq \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\right)^\ell \cdot \frac{1}{4} 2^{2\ell+1} \\ &= \frac{3^\ell}{4^{2\ell+1}} 2^{2\ell+1} \\ &= 2 \frac{3^\ell}{4^{2\ell+1}} 4^\ell \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3^\ell}{4^\ell} \\ &< \left(\frac{3}{4}\right)^\ell\end{aligned}$$

Solución del ejercicio

Finalmente concluimos que:

$$\Pr_{s_1, \dots, s_{2\ell+1}} (M(w, s_1, \dots, s_{2\ell+1}) \text{ es incorrecto}) = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} (1-p)^i p^{2\ell+1-i} < \left(\frac{3}{4}\right)^{\ell}$$

Sea $n = |w|$. Para terminar necesitamos definir ℓ de manera tal que:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell} \leq \frac{1}{2^{p(n)}}$$

Solución del ejercicio

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\ell &\geq \log_{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{2^{p(n)}} \right) \\ &= p(n) \log_{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{2} \right)\end{aligned}$$

Dado que $2.41 > \log_{\frac{3}{4}}(\frac{1}{2})$, definimos $\ell(n) = 3p(n)$

Tenemos la cota superior enunciada para la probabilidad de error de M

- ▶ Además se tiene que $t_M(n)$ es $O(n^k)$ para una constante k ya que $t_{M_1}(n)$ es $O(n^{k_1})$ para una constante k_1 y $\ell(n)$ es $O(p(n))$

