La jerarquía baja para NP

IIC3810

El poder de un lenguaje como oráculo

Sea L un lenguaje.

Para tratar de entender qué tan difícil es decidir L podemos pensar en qué logramos si lo usamos como oráculo.

Ejemplo

Veamos dos casos posibles para L

- Si $L \in \text{PTIME}$, entonces $\text{PTIME}^L = \text{PTIME}$
- Pero si $L \in \text{NP} \cap \text{co-NP}$, entonces hay evidencia para creer que $\text{PTIME} \subsetneq \text{PTIME}^L$
  - Si no se tendría que $\text{FACT} \in \text{PTIME}$

El poder como oráculo de un lenguaje en NP $\cap$ co-NP

Suponga que $L \in \text{NP} \cap \text{co-NP}$

¿Existe alguna clase $\mathcal{C}$ para la cual $\mathcal{C}^L = \mathcal{C}$?

Teorema

Si $L \in NP \cap co\text{-}NP$, entonces $NP^L = NP$

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Una caracterización de NP $\cap$ co-NP basada en oráculos

El teorema anterior puede ser extendido para dar una caracterización de los problemas en NP $\cap$ co-NP

Teorema

Para cada lenguaje L se tiene que $L \in NP \cap$ co-NP si y sólo si $NP^L = NP$

Demostración: Sólo nos falta demostrar la dirección ($\Leftarrow$)

Suponga que $\mathrm{NP}^L = \mathrm{NP}$

- Tenemos que demostrar que $L \in \mathrm{NP} \cap$ co-NP

Una caracterización de NP $\cap$ co-NP basada en oráculos

Sabemos que $L \in \text{PTIME}^L$ y $\overline{L} \in \text{PTIME}^L$

Dado que $\text{PTIME}^L \subseteq \text{NP}^L$, concluimos que $L \in \text{NP}^L$ y $\overline{L} \in \text{NP}^L$

Pero entonces $L \in \text{NP}$ y $\overline{L} \in \text{NP}$ dado que $\text{NP}^L = \text{NP}$

Por lo tanto $L \in \text{NP}$ y $L \in \text{co-NP}$, vale decir, $L \in \text{NP} \cap \text{co-NP}$ $\square$

Un corolario fundamental: una propiedad de clausura para NP $\cap$ co-NP

Recuerde que decimos que NP es cerrada bajo la noción de reducción $\leq_m^p$ ya que:

$$\text{si } L_1 \leq_m^p L_2 \text{ y } L_2 \in \text{NP, entonces } L_1 \in \text{NP}$$

También co-NP es cerrada bajo la noción de reducción $\leq_m^p$

Un corolario fundamental: una propiedad de clausura para NP $\cap$ co-NP

Por el contrario se cree que NP y co-NP no son cerrados bajo la noción de reducción $\leq_T^p$ por el siguiente resultado:

Proposición

Si NP (o co-NP) es cerrada bajo $\leq_T^p$, entonces NP $=$ co-NP

Ejercicio

Demuestre la proposición.

Un corolario fundamental: una propiedad de clausura para NP $\cap$ co-NP

¿Hereda NP $\cap$ co-NP las propiedades de clausura de NP y co-NP?

De la caracterización de NP $\cap$ co-NP obtenemos el siguiente resultado:

Corolario

NP $\cap$ co-NP es cerrado bajo $\leq_T^p$

Demostración del corolario

Suponga que $L_1 \leq_T^p L_2$ y $L_2 \in \text{NP} \cap \text{co-NP}$

- Tenemos que demostrar que $L_1 \in \text{NP} \cap \text{co-NP}$

Dado que $L_1 \leq_T^p L_2$ tenemos que $\text{NP}^{L_1} \subseteq \text{NP}^{L_2}$

- ¿Por qué?

Puesto que $L_2 \in \text{NP} \cap \text{co-NP}$, tenemos por la caracterización de $\text{NP} \cap \text{co-NP}$ que $\text{NP}^{L_2} = \text{NP}$

- Concluimos que $\text{NP}^{L_1} = \text{NP}$ ya que $\text{NP} \subseteq \text{NP}^{L_1} \subseteq \text{NP}^{L_2} = \text{NP}$

Dado que $\text{NP}^{L_1} = \text{NP}$, usando nuevamente la caracterización de $\text{NP} \cap \text{co-NP}$ obtenemos que $L_1 \in \text{NP} \cap \text{co-NP}$ $\square$

La falla de completitud: Otra mirada al poder de un lenguaje

¿Puede un problema en NP $\cap$ co-NP ser NP-completo?

Se cree que la respuesta es no por el siguiente resultado:

Proposición

Sea $L \in NP \cap co\text{-}NP$. Si L es NP-completo, entonces $NP = co\text{-}NP$

Ejercicio

Demuestre la proposición.