

Un ingrediente necesario

Al igual que para el caso de RP, los valores $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$ en la definición de BPP pueden ser reemplazados por valores arbitrariamente más pequeños

Lema de amplificación para BPP

Sea L un lenguaje sobre un alfabeto Σ . Si $L \in \text{BPP}$, entonces para cada $\ell \in \mathbb{N}$, existe una MT probabilística M tal que $t_M(n)$ es $O(n^k)$ y para cada $w \in \Sigma^*$:

- ▶ Si $w \in L$, entonces $\Pr(M \text{ acepte } w) \geq 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^\ell$
- ▶ Si $w \notin L$, entonces $\Pr(M \text{ acepte } w) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^\ell$

Demostración del lema de amplificación para BPP

Como $L \in \text{BPP}$, existe una MT probabilística M_1 tal que $t_{M_1}(n)$ es $O(n^{k_1})$ y para cada $w \in \Sigma^*$:

- ▶ Si $w \in L$, entonces $\Pr(M_1 \text{ acepte } w) \geq \frac{3}{4}$
- ▶ Si $w \notin L$, entonces $\Pr(M_1 \text{ acepte } w) \leq \frac{1}{4}$

Utilizamos la MT M_1 para construir la MT M mencionada en el enunciado del lema de amplificación.

Demostración del lema de amplificación para BPP

Considere el siguiente algoritmo que recibe como entrada $w \in \Sigma^*$:

1. Escoja al azar con distribución uniforme y de manera independiente strings $s_1, s_2, \dots, s_{2\ell+1}$ en $\{0, 1\}^*$ y tales que $|s_1| = |s_2| = \dots = |s_{2\ell+1}| = t_{M_1}(|w|)$
2. Construya el conjunto $A = \{i \in \{1, \dots, 2\ell + 1\} \mid M_1(w, s_i) \text{ acepta}\}$
3. Si $|A| \geq \ell + 1$, entonces retorne **sí**, sino retorne **no**

Suponga que M es una MT probabilística que implementa este algoritmo

- Se tiene que $t_M(n)$ es $O(n^k)$ para una constante k ya que $t_{M_1}(n)$ es $O(n^{k_1})$ para una constante k_1

Vamos a demostrar que M satisface las condiciones del lema

Demostración del lema de amplificación para BPP

En primer lugar consideramos $w \in L$, y suponemos que

$$\Pr(M_1 \text{ acepte } w) = p$$

con $p \geq \frac{3}{4}$

Además suponemos que $p < 1$

- ▶ Si $p = 1$ entonces se tiene que $\Pr(M \text{ acepte } w) = 1 \geq 1 - (\frac{3}{4})^\ell$.
¿Por qué?

Tenemos entonces que:

$$\Pr(M \text{ rechace } w) = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} p^i (1-p)^{2\ell+1-i}$$

Demostración del lema de amplificación para BPP

Como $\frac{3}{4} \leq p < 1$, tenemos que $1 \leq \frac{p}{1-p}$

Entonces para $i \in \{0, \dots, \ell\}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} p^i(1-p)^{2\ell+1-i} &\leq p^i(1-p)^{2\ell+1-i} \left(\frac{p}{1-p} \right)^{\ell-i} \\ &= p^\ell(1-p)^{\ell+1} \end{aligned}$$

Demostración del lema de amplificación para BPP

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} p^i (1-p)^{2\ell+1-i} &\leq \sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} p^{\ell} (1-p)^{\ell+1} \\ &= p^{\ell} (1-p)^{\ell+1} \sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} \\ &\leq p^{\ell} (1-p)^{\ell+1} 2^{2\ell+1}\end{aligned}$$

El mayor valor de la función $f(x) = x(1-x)$ en el intervalo $[\frac{3}{4}, 1)$ se alcanza en $x = \frac{3}{4}$

► Concluimos que $p(1-p) \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$

Demostración del lema de amplificación para BPP

Concluimos que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} p^i (1-p)^{2\ell+1-i} &\leq p^{\ell} (1-p)^{\ell+1} 2^{2\ell+1} \\ &= (p(1-p))^{\ell} (1-p) 2^{2\ell+1} \\ &\leq \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\right)^{\ell} \cdot \frac{1}{4} 2^{2\ell+1} \\ &= \frac{3^{\ell}}{4^{2\ell+1}} 2^{2\ell+1} \\ &= 2 \frac{3^{\ell}}{4^{2\ell+1}} 4^{\ell} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{\ell}}{4^{\ell}} \\ &< \left(\frac{3}{4}\right)^{\ell}\end{aligned}$$

Demostración del lema de amplificación para BPP

Finalmente concluimos que:

$$\begin{aligned}\Pr(M \text{ rechace } w) &= \sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} p^i (1-p)^{2\ell+1-i} \\ &< \left(\frac{3}{4}\right)^{\ell}\end{aligned}$$

De lo cual obtenemos que:

$$\Pr(M \text{ acepte } w) \geq 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{\ell}$$

Demostración del lema de amplificación para BPP

En segundo lugar consideramos $w \notin L$, y suponemos que

$$\Pr(M_1 \text{ acepte } w) = q$$

con $q \leq \frac{1}{4}$

Además suponemos que $0 < q$

- Si $q = 0$ entonces se tiene que $\Pr(M \text{ acepte } w) = 0 \leq (\frac{3}{4})^\ell$.
¿Por qué?

Tenemos entonces que:

$$\Pr(M \text{ acepte } w) = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} (1-q)^i q^{2\ell+1-i}$$

Demostración del lema de amplificación para BPP

Como $0 < q \leq \frac{1}{4}$, tenemos que $1 \leq \frac{1-q}{q}$

Entonces para $i \in \{0, \dots, \ell\}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} (1-q)^i q^{2\ell+1-i} &\leq (1-q)^i q^{2\ell+1-i} \left(\frac{1-q}{q} \right)^{\ell-i} \\ &= (1-q)^\ell q^{\ell+1} \end{aligned}$$

Demostración del lema de amplificación para BPP

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} (1-q)^i q^{2\ell+1-i} &\leq \sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} (1-q)^{\ell} q^{\ell+1} \\ &= (1-q)^{\ell} q^{\ell+1} \sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} \\ &\leq (1-q)^{\ell} q^{\ell+1} 2^{2\ell+1}\end{aligned}$$

El mayor valor de la función $f(x) = x(1-x)$ en el intervalo $(0, \frac{1}{4}]$ se alcanza en $x = \frac{1}{4}$

► Concluimos que $(1-q)q \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$

Demostración del lema de amplificación para BPP

Concluimos que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} (1-q)^i q^{2\ell+1-i} &\leq (1-q)^{\ell} q^{\ell+1} 2^{2\ell+1} \\ &= ((1-q)q)^{\ell} q 2^{2\ell+1} \\ &\leq \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\right)^{\ell} \cdot \frac{1}{4} 2^{2\ell+1}\end{aligned}$$

Como en el caso anterior concluimos que:

$$\sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} (1-q)^i q^{2\ell+1-i} < \left(\frac{3}{4}\right)^{\ell}$$

Demostración del lema de amplificación para BPP

Finalmente concluimos que:

$$\begin{aligned}\Pr(M \text{ acepte } w) &= \sum_{i=0}^{\ell} \binom{2\ell+1}{i} (1-q)^i q^{2\ell+1-i} \\ &\leq \left(\frac{3}{4}\right)^{\ell}\end{aligned}$$

