Teoría de Matroides.

Nicolás Rivera

23 de Junio de 2011

Pontificia Universidad Católica de Chile

Índice

Índice

Índice

Definición

Un sistema $(E, \mathcal{F})$ es un sistema de independencia si

M1 $\emptyset \in \mathcal{F}$;

M2 Si $X \subseteq Y \in \mathcal{F}$ then $X \in \mathcal{F}$.

Definición

Un sistema $(E, \mathcal{F})$ es un sistema de independencia si

M1 $\emptyset \in \mathcal{F}$;

M2 Si $X \subseteq Y \in \mathcal{F}$ then $X \in \mathcal{F}$.

Los elementos de $\mathcal{F}$ se llaman independientes, los de $2^E \setminus \mathcal{F}$ dependientes.

Definición

Un sistema $(E, \mathcal{F})$ es un sistema de independencia si

M1 $\emptyset \in \mathcal{F}$;

M2 Si $X \subseteq Y \in \mathcal{F}$ then $X \in \mathcal{F}$.

Los elementos de $\mathcal{F}$ se llaman independientes, los de $2^E \setminus \mathcal{F}$ dependientes. Los conjuntos dependientes minimales se llaman circuitos, los elementos independientes maximales se llaman bases.

Definición

Un sistema $(E, \mathcal{F})$ es un sistema de independencia si

M1 $\emptyset \in \mathcal{F}$;

M2 Si $X \subseteq Y \in \mathcal{F}$ then $X \in \mathcal{F}$.

Los elementos de $\mathcal{F}$ se llaman independientes, los de $2^E \setminus \mathcal{F}$ dependientes. Los conjuntos dependientes minimales se llaman circuitos, los elementos independientes maximales se llaman bases. Para $X \subset E$, los conjuntos independientes maximales de X se llaman bases de X.

Definición

Sea $(E, \mathcal{F})$ un sistema de independencia. Sea $X \subset E$, definimos el rango (rank) de X por

$$r(X) = \{\text{máx}\,|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{F}\}$$

Definición

Sea $(E, \mathcal{F})$ un sistema de independencia. Sea $X \subset E$, definimos el rango (rank) de X por

$$r(X) = \{\text{máx} \, |Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{F}\}$$

Definimos la clausura (closure) de X por

$$\sigma(X) = \{y \in E : r(X \cup \{y\}) = r(X)\},$$

Definición

Sea $(E, \mathcal{F})$ un sistema de independencia. Sea $X \subset E$, definimos el rango (rank) de X por

$$r(X) = \{\text{máx}\,|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{F}\}$$

Definimos la clausura (closure) de X por

$$\sigma(X) = \{y \in E : r(X \cup \{y\}) = r(X)\},$$

Notemos que si X es independiente maximal entonces $\sigma(X) = E$, es decir, genera el espacio entero.

Definición (Maximization Problem for Independence System)

- Instancia: un sistema de independencia $(E, \mathcal{F})$ y $c : E \to \mathbb{R}^+$.
- Objetivo: Encontrar $X \in \mathcal{F}$ tal que $c(X) = \sum_{e \in X} c(e)$ es maximo.

Definición (Minimization Problem for Independence System)

- Instancia: un sistema de independencia $(E, \mathcal{F})$ y $c : E \to \mathbb{R}^+$.
- Objetivo: Encontrar una base B tal que $c(B)$ es mínimo.

Ejemplos.

1. TSP:

Ejemplos.

1. TSP: Sea un grafo G,

Ejemplos.

1. TSP: Sea un grafo G, $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$,

Ejemplos.

1. TSP: Sea un grafo G, $c : E(G) \to \mathbb{R}^{+}$, $E = E(G)$,

Ejemplos.

1. TSP: Sea un grafo G, $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$, $E = E(G)$, $\mathcal{F} = \{F \subseteq E : F$ es subconjunto de un ciclo hamiltoniano$\}$.

Ejemplos.

1. TSP: Sea un grafo G, $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$, $E = E(G)$, $\mathcal{F} = \{F \subseteq E : F \text{ es subconjunto de un ciclo hamiltoniano}\}$. (Minimizar)

Ejemplos.

1. TSP: Sea un grafo G, $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$, $E = E(G)$,
   $\mathcal{F} = \{F \subseteq E : F$ es subconjunto de un ciclo hamiltoniano$\}$.
   (Minimizar)
2. Maximum Weight Stable Set Problem: Sea G un grafo,
   $c : V(G) \to \mathbb{R}^+$ $E = V(G)$,
   $\mathcal{F} = \{F \subset E : F$ es conjunto estable de $G\}$. (Maximizar)

Ejemplos.

1. TSP: Sea un grafo G, $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$, $E = E(G)$, $\mathcal{F} = \{F \subseteq E : F \text{ es subconjunto de un ciclo hamiltoniano}\}$. (Minimizar)
2. Maximum Weight Stable Set Problem: Sea G un grafo, $c : V(G) \to \mathbb{R}^+$ $E = V(G)$, $\mathcal{F} = \{F \subset E : F \text{ es conjunto estable de } G\}$. (Maximizar)
3. Maximum/Minimum Weight Matching Problem: Sea G un grafo, $c : E(G) \to \mathbb{R}$, $E = E(G)$, $\mathcal{F} = \{F \subset E : F \text{ es un emparejamiento}\}$. (Maximizar/Minimizar).

Ejemplos.

1. TSP: Sea un grafo G, $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$, $E = E(G)$, $\mathcal{F} = \{F \subseteq E : F$ es subconjunto de un ciclo hamiltoniano$\}$. (Minimizar)
2. Maximum Weight Stable Set Problem: Sea G un grafo, $c : V(G) \to \mathbb{R}^+$ $E = V(G)$, $\mathcal{F} = \{F \subset E : F$ es conjunto estable de $G\}$. (Maximizar)
3. Maximum/Minimum Weight Matching Problem: Sea G un grafo, $c : E(G) \to \mathbb{R}$, $E = E(G)$, $\mathcal{F} = \{F \subset E : F$ es un emparejamiento$\}$. (Maximizar/Minimizar).
4. Minimum Spanning Tree: Sea un grafo G, $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$, $E = E(G)$, $\mathcal{F} = \{$conjunto de bosques de $G\}$. (Minimizar)

Definición

Un sistema de independencia es un matroide si

M3 Si $X, Y \in \mathcal{F}$ y $|X| > |Y|$, entonces existe $x \in X \setminus Y$ con $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$.

Ejemplo Matroides.

1. E es el conjunto de vectores de un espacio vectorial y $\mathcal{F}$ familia de conjuntos de vectores linealmente independientes. (Vectorial Matroid)

Ejemplo Matroides.

1. E es el conjunto de vectores de un espacio vectorial y $\mathcal{F}$ familia de conjuntos de vectores linealmente independientes. (Vectorial Matroid)
2. E es el conjunto de aristas de un grafo G, $\mathcal{F}$ el conjunto de bosques de G. (Cycle Matroid-Graphical Matroid)

Ejemplo Matroides.

1. E es el conjunto de vectores de un espacio vectorial y $\mathcal{F}$ familia de conjuntos de vectores linealmente independientes. (Vectorial Matroid)
2. E es el conjunto de aristas de un grafo G, $\mathcal{F}$ el conjunto de bosques de G. (Cycle Matroid-Graphical Matroid)
3. E es un conjunto de finito, k un entero positivo, $\mathcal{F} = \{F \subseteq E : |F| \leq k\}$. (Uniform Matroid)

Ejemplo Matroides.

1. E es el conjunto de vectores de un espacio vectorial y $\mathcal{F}$ familia de conjuntos de vectores linealmente independientes. (Vectorial Matroid)
2. E es el conjunto de aristas de un grafo G, $\mathcal{F}$ el conjunto de bosques de G. (Cycle Matroid-Graphical Matroid)
3. E es un conjunto de finito, k un entero positivo, $\mathcal{F} = \{F \subseteq E : |F| \leq k\}$. (Uniform Matroid)
4. E conjunto de vértices de un grafo G, $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los vértices de G tal que existe un emparejamiento que cubre todos sus vértices. (Matching Matroid)

Teorema

Sea $(E, \mathcal{F})$ *un sistema de independencia, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

Teorema

Sea $(E, \mathcal{F})$ un sistema de independencia, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

- M3 *Si $X, Y \in \mathcal{F}$ y $|X| > |Y|$, entonces existe $x \in X \setminus Y$ con $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$.*
- M3' *Si $X, Y \in \mathcal{F}$ y $|X| = |Y| + 1$, entonces existe $x \in X \setminus Y$ con $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$.*
- M3'' *Para cada $X \subseteq E$, todas las bases de X tienen la misma cardinalidad.*

Definición

Sea $(E, \mathcal{F})$ un sistema de independencia, para $X \subseteq E$ definimos el rango inferior (lower rank) por

$$\rho(X) = \text{mín}\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{F} \wedge \forall x \in X \setminus Y (Y \cup \{x\} \notin \mathcal{F})\}.$$

$\rho(X)$ es el tamaño de las bases más chicas que hay en X.
El cuociente de rango de $(E, \mathcal{F})$ está definido por

$$q(E, \mathcal{F}) = \min_{F \subset E} \frac{\rho(F)}{r(F)}.$$

Teorema

Sea $(E, \mathcal{F})$ *un sistema de independencia, entonces* $q(E, \mathcal{F}) \leq 1$ *y* $q(E, \mathcal{F}) = 1$ *si y sólo si* $(E, \mathcal{F})$ *es un matroide.*

Algoritmo greedy. Sea $(E, \mathcal{F})$ un sistema de independencia y $c : E \to \mathbb{R}^+$ una función no negativa.

- Sea $E = \{e_1, ..., e_n\}$ tal que $c(e_1) \geq c(e_2) \geq ... \geq c(e_n)$,
- Sea $F = \emptyset$,
- Desde $i = 1$ hasta n si $F \cup \{e_i\} \in \mathcal{F}$ entonces $F \leftarrow F \cup \{e_i\}$.

Teorema

Sea $(E, \mathcal{F})$ un sistema de independencia. Para $c : E \to \mathbb{R}^+$ denotamos por $G(E, \mathcal{F}, c)$ el costo de la solución encontrada por el algoritmo greedy para maximizar y por $OPT(E, \mathcal{F}, c)$ el costo máximo, entonces

$$q(E, \mathcal{F}) \leq \frac{G(E, \mathcal{F}, c)}{OPT(E, \mathcal{F}, c)} \leq 1.$$

Demostración:

Demostración: Supongamos que $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ con $e_1 \leq e_2 \leq ... \leq e_n$ y llamemos $E_j := \{e_1, \ldots, e_j\}, j \in \{1, \ldots, n\}$. Sea G_n la solución encontrada por el algoritmo greedy y O_n a una solución óptima (no necesariamente es única). Para $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ definimos $G_j := G_n \cap E_j$ y $O_j := O_n \cap E_j$. Finalmente definimos $d_n := c(e_n)$ y $d_j := c(e_j) - c(e_{j+1})$ para $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

Notemos que $d_j \geq 0$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Además como $O_n \in \mathcal{F}$, entonces $O_j \in \mathcal{F}$ y luego $|O_j| \leq r(E_j)$ ya que $O_j \subseteq E_j$. Por otro lado se tiene que $|G_j| \geq \rho(E_j)$ que G_j es base de E_j, ya que si existe $e \in E_j \setminus G_j$ tal que $G_j \cup \{e\} \in \mathcal{F}$ entonces en el momento en que el algoritmo greedy decide si agregar o no e a la solución lo hubiese agregado, lo que es una contradición. De las dos desigualdades anterior se sigue que $q(E, \mathcal{F}) \leq \frac{|G_j|}{|O_j|}$ $(j = 1, \dots, n)$.

Así:

$$
\begin{aligned}
c(G_n) &= \sum_{j=1}^{n} (|G_j| - |G_{j-1}|)c(e_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} |G_j| d_j \\
&\geq q(E, \mathcal{F}) \sum_{j=1}^{n} |O_j| d_j \\
&= q(E, \mathcal{F}) \sum_{j=1}^{n} (|O_j| - |O_{j-1}|)c(e_j) \\
&= q(E, \mathcal{F}) c(O_n)
\end{aligned}
$$

Demostrando lo pedido.

Teorema

Un sistema de independecia $(E, \mathcal{F})$ *es un matroide si y sólo si el algoritmo greedy encuentra una solución óptima para el problema de maximización para todo* $c : E \to \mathbb{R}^+$

Teorema

Sea $(E, \mathcal{F})$ *un sistema de independencia. Si para todo* $A \in \mathcal{F}$ *y* $e \in E$ *se tiene que* $A \cup \{e\}$ *contiene a lo más* p *circuitos, entonces* $q(E, \mathcal{F}) \geq \frac{1}{p}$.

Teorema

Sea $(E, \mathcal{F})$ un sistema de independencia. Si para todo $A \in \mathcal{F}$ y $e \in E$ se tiene que $A \cup \{e\}$ contiene a lo más p circuitos, entonces $q(E, \mathcal{F}) \geq \frac{1}{p}$.

Ejemplo: Para los emparejamientos se tiene que $p = 2$.

Dados dos sistemas de independencia $(E, \mathcal{F}_1)$ y $(E, \mathcal{F}_2)$ su intersección es

$$(E, \mathcal{F}_1 \cap F_2).$$

Dados dos sistemas de independencia $(E, \mathcal{F}_1)$ y $(E, \mathcal{F}_2)$ su intersección es

$$(E, \mathcal{F}_1 \cap F_2).$$

Teorema

Todo sistema de independencia es la intersección de un número finito de matroides.

Dados dos sistemas de independencia $(E, \mathcal{F}_1)$ y $(E, \mathcal{F}_2)$ su intersección es

$$(E, \mathcal{F}_1 \cap F_2).$$

Teorema

Todo sistema de independencia es la intersección de un número finito de matroides.

Teorema

Si $(E, \mathcal{F})$ es la intersección de p matroide, entonces $q(E, \mathcal{F}) \geq \frac{1}{p}$.

Sea $M = (E, \mathcal{F})$ un matroide y sea B su conjunto de bases.

Sea $M = (E, \mathcal{F})$ un matroide y sea B su conjunto de bases. Definimos $M^* = (E, \mathcal{F}^*)$ como el sistema de independencia cuyas bases son los complementos de las bases de B.
Una base de M^* se dice una co-base de M, un circuito de M^* se dice un co-circuito de M, etc.

Algunas propiedades

Algunas propiedades

1. M^* es matroide

Algunas propiedades

1. M^* es matroide
2. $M^{**} = M$.

Algunas propiedades

1. M^* es matroide
2. $M^{**} = M$.
3. $r^*(X) = |X| - (r(E) - r(\bar{X}))$
4. Los cocircuitos son los conjuntos minimales que intersectan toda base. Las Bases son los conjuntos minimales que intersectan todo circuito.

Un ejemplo importante: Bond Matroid que se define como el dual del Graphical Matroid.

Un ejemplo importante: Bond Matroid que se define como el dual del Graphical Matroid.
Es posible caracterizar el Bond Matroid por:

Un ejemplo importante: Bond Matroid que se define como el dual del Graphical Matroid.
Es posible caracterizar el Bond Matroid por:

Teorema

1. *Sea M un Graphical Matroid, entonces sus circuitos son los ciclos del grafo.*
2. *Las circuitos de M^* son los cortes por aristas minimales.*

Una aplicación:

Teorema

Un grafo G es planar ssi M^* es un graphical matroid, donde M es el Cycle Matroid de G.