

Operadores de punto fijo y el μ -calculus

IIC3800

Pablo Barceló

Transformaciones

Sea X un conjunto. Una **transformación** es una función $\tau : 2^X \rightarrow 2^X$.

Decimos que la transformación τ es:

- ▶ **Monotónica:** Si para todo $X_0, X_1 \subseteq X$,

$$X_0 \subseteq X_1 \Rightarrow \tau(X_0) \subseteq \tau(X_1).$$

- ▶ **$\bigcup$ -continua:** Si para todo $X_0, X_1, X_2, \dots \subseteq X$,

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \Rightarrow \tau(\bigcup_i X_i) = \bigcup_i \tau(X_i).$$

- ▶ **$\bigcap$ -continua:** Si para todo $X_0, X_1, X_2, \dots \subseteq X$,

$$X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \Rightarrow \tau(\bigcap_i X_i) = \bigcap_i \tau(X_i).$$

Ejemplo de transformación monotónica

Ejemplo: Sea E una relación binaria sobre un conjunto finito A . Considere la transformación τ sobre $A \times A$ dada por

$$\tau(X) = E \cup (E \circ X),$$

donde $E \circ X$ denota composición: $\{(a, b) \mid (a, c) \in E, (c, b) \in X\}$.

Es fácil ver que el operador es monotónico:

$$X \subseteq Y \Rightarrow (E \circ X) \subseteq (E \circ Y).$$

Luego explicaremos porque además es $\bigcup$ -continuo y $\bigcap$ -continuo.

Puntos fijos (fixed-points)

Decimos que $X' \subseteq X$ es un **punto fijo**, si $\tau(X') = X'$.

Lemma (Tarski)

Si la transformación τ es monótonica, entonces existe un menor y un mayor punto fijo de τ con respecto a $\subseteq$. Estos son, respectivamente,

$$\bigcap \{X' \mid \tau(X') \subseteq X'\} \quad \text{y} \quad \bigcup \{X' \mid X' \subseteq \tau(X')\}.$$

Vamos a demostrar este resultado.

Demostración del lemma de punto fijo

Demostraremos que existe un menor punto fijo. La existencia del mayor punto fijo puede ser demostrada de la misma forma.

Sea $\text{fp}(X)$ el conjunto

$$\{X' \subseteq X \mid \tau(X') \subseteq X'\}.$$

Note que $\text{fp}(X)$ no es vacío.

Asuma

$$X_0 = \bigcap \{X' \mid X' \in \text{fp}(X)\}.$$

Basta demostrar que X_0 es un punto fijo (ya que si esto es cierto, entonces claramente X_0 es el menor punto fijo).

Demostración del lemma de punto fijo

Ya que $X_0 \subseteq X'$, para todo $X' \in \text{fp}(X)$, por monotonicidad y definición de $\text{fp}(X)$ concluimos que

$$\tau(X_0) \subseteq \tau(X') \subseteq X', \quad \text{para todo } X' \in \text{fp}(X).$$

Por tanto, $\tau(X_0) \subseteq X_0$ (ya que $\tau(X_0)$ es una cota inferior para $\text{fp}(X)$ y X_0 es el ínfimo de $\text{fp}(X)$).

Además, por monotonicidad, $\tau(\tau(X_0)) \subseteq \tau(X_0)$. Entonces, $\tau(X_0)$ está en $\text{fp}(X)$, y por tanto, $X_0 \subseteq \tau(X_0)$.

Concluimos que X_0 es punto fijo, y el lemma ha sido demostrado.

Lemma

Si X es finito y τ es continuo, entonces τ es $\bigcup$ -continuo y $\bigcap$ -continuo.

Ejercicio: Demuestre el lemma.

Demuestre los siguientes lemmas.

Lemma

Si τ es monotónico, entonces para todo $i \geq 0$ se tiene que $\tau^i(\emptyset) \subseteq \tau^{i+1}(\emptyset)$ y $\tau^{i+1}(X) \subseteq \tau^i(X)$.

Lemma

Si X es finito y τ es monotónico, entonces existe un $j \geq 0$ tal que $\tau^j(\emptyset)$ es el menor punto fijo de τ . Similarmente, existe $k \geq 0$ tal que $\tau^k(X)$ es el mayor punto fijo de τ .

Ejemplo: Siguiendo con el operador τ del ejemplo anterior se tiene que:

- ▶ $\tau^0(\emptyset) = \emptyset,$
- ▶ $\tau^1(\emptyset) = \{(a, b) \mid \text{la distancia entre } a \text{ y } b \text{ es } 1\},$
- ▶ $\tau^2(\emptyset) = \{(a, b) \mid \text{la distancia entre } a \text{ y } b \text{ es } \leq 2\},$
- ▶ $\tau^3_\phi(\emptyset) = \dots$

Por tanto, el menor punto fijo de la transformación τ es la clausura transitiva de E .

Cómo computar el menor punto fijo

El último lemma visto es interesante porque nos entrega un procedimiento para computar el menor (resp., mayor) punto fijo de un operador monótono τ sobre un conjunto finito X :

```
function lfp( $X, \tau$ )  
   $Q := \emptyset$ ;  
   $Q' := \tau(Q)$ ;  
  while  $Q \neq Q'$  do  
     $Q := Q'$ ;  
     $Q' := \tau(Q')$ ;  
  end while  
  return( $Q$ )  
end function
```

El número de iteraciones es a lo más $|X|$.

El μ -calculus es una lógica temporal bastante poderosa que utiliza menores y mayores puntos fijos para expresar propiedades. Fue ideado por Kozen a principios de los 80s.

- ▶ D. Kozen. Results on the Propositional μ -Calculus. Theor. Comput. Sci. 27: 333-354 (1983).

El interés en el μ -calculus radica en dos consideraciones:

- ▶ Subsume a todas las lógicas temporales que hemos visto hasta ahora: LTL, CTL, CTL*.
- ▶ Para algunos de sus fragmentos existen algoritmos de model checking eficientes.

El μ -calculus: Sintaxis

Asuma que $\mathcal{Y}$ es un conjunto infinito de variables $\{Y, Y_1, Y_2, \dots\}$. Las fórmulas en el μ -calculus (sobre alfabeto finito Σ) están dadas por la siguiente gramática:

$$\phi, \phi' := a \in \Sigma \mid Y \in \mathcal{Y} \mid \neg\phi \mid \phi \vee \phi' \mid \Diamond\phi \mid \mu Y. \phi(Y)$$

donde se requiere que para $\mu Y. \phi(Y)$ la variable Y aparezca sólo **positivamente** en $\phi(Y)$, i.e. en la mira de un número par de negaciones (explicaremos luego por qué).

Una variable Y en una fórmula del μ -calculus puede aparecer **libre** o **acotada**, dependiendo de si está en la mira de un operador μY o no.

- Usamos $\phi(Y_1, \dots, Y_n)$ para denotar que ϕ contiene como variables libres a $Y_1, \dots, Y_n$.

El μ -calculus: Transformaciones definidas por fórmulas

Para una variable Y y un conjunto V de estados, denotamos por $Y \rightarrow V$ el hecho de que la variable Y asume el valor V .

Sea $\phi(Y, Y_1, \dots, Y_n)$ una fórmula positiva en Y .

La **transformación definida por $\phi(Y)$** (en un sistema de transición $\mathcal{M}$ con conjunto de estados E) es la transformación $\tau_\phi : 2^E \rightarrow 2^E$ definida por

$$\tau_\phi(V) = \{e \mid (\mathcal{M}, e) \models \phi(Y \rightarrow V)\}.$$

El μ -calculus: Semántica

Como para nuestras anteriores lógicas temporales, las fórmulas del μ -calculus se evalúan en un estado e de un sistema de transición $\mathcal{M}$, pero ahora debemos considerar también una **valuación** $\sigma : \mathcal{Y} \rightarrow 2^E$ que interprete las variables libres:

- ▶ $(\mathcal{M}, \sigma, e) \models a$ si y sólo si $e \in P_a$.
- ▶ $(\mathcal{M}, \sigma, e) \models Y$ si y sólo si $e \in \sigma(Y)$.
- ▶ $(\mathcal{M}, \sigma, e) \models \Diamond \phi(Y_1, \dots, Y_n)$ si y sólo si existe e' tal que $R(e, e')$ es cierto en $\mathcal{M}$ y $(\mathcal{M}, \sigma, e') \models \phi(Y_1, \dots, Y_n)$.
- ▶ $(\mathcal{M}, \sigma, e) \models \mu Y. \phi(Y, Y_1, \dots, Y_n)$ si y sólo si e pertenece al **menor punto fijo** (luego veremos que siempre existe) de la transformación definida por $\phi(Y, Y_1 \rightarrow \sigma(Y_1), \dots, Y_n \rightarrow \sigma(Y_n))$.

Si ϕ no tiene variables libres, escribimos simplemente $(\mathcal{M}, e) \models \phi$.

El μ -calculus: Otras fórmulas

De ahora en adelante asumiremos que las fórmulas $\phi \wedge \phi'$, $\Box\phi$, y $\nu Y.\phi(Y)$ definidas como sigue también pertenecen a la lógica:

$$\phi \wedge \phi' \equiv \neg(\neg\phi \vee \neg\phi') \quad \Box\phi \equiv \neg\Diamond\neg\phi$$

$$\nu Y.\phi(Y) \equiv \neg\mu Y.\neg\phi(\neg Y).$$

El μ -calculus: Existencia de menores puntos fijos

La restricción de que Y aparezca positivamente en $\mu Y.\phi(Y)$ nos asegura que el menor punto fijo de la transformación τ_ϕ siempre existe. De hecho,

Proposición

Si Y aparece sólo positivamente en $\phi(Y)$, entonces τ_ϕ es monótonico.

Ejercicio: Demuestre la proposición.

El μ -calculus: Ejemplo

Ejemplo: La siguiente es una fórmula en el μ -calculus:

$$\mu Y.(a \vee \Diamond Y).$$

Denote por ϕ a la fórmula $(a \vee \Diamond Y)$.

Luego,

- ▶ $\tau_{\phi}^0(\emptyset) = \emptyset$,
- ▶ $\tau_{\phi}^1(\emptyset) = \{e \mid e \in P_a\}$,
- ▶ $\tau_{\phi}^2(\emptyset) = \{e \mid \text{existe elemento } e' \in P_a \text{ a distancia } \leq 1 \text{ de } e\}$,
- ▶ $\tau_{\phi}^3(\emptyset) = \dots$

¿Cuándo es cierto entonces que $(\mathcal{M}, e) \models \mu Y.(a \vee \Diamond Y)$?

- ▶ Cuando $(\mathcal{M}, e) \models \mathbf{EF}a$.

Ejercicio: Demuestre que para cualquier fórmula $\alpha(X)$ del μ -calculus que es positiva en X las siguientes fórmulas son equivalentes:

$$\mu X. \alpha(X) \quad \text{y} \quad \alpha(\mu X. \alpha(X)).$$

Ejercicio: ¿Cuál es la semántica de las siguientes fórmulas?

$$\mu X. \Box X \quad \text{y} \quad \nu X. \Box X.$$

Usando las leyes de De Morgan y las siguiente dualidades

$$\neg \Diamond \phi \equiv \Box \neg \phi \quad \neg \Box \phi \equiv \Diamond \neg \phi$$

$$\neg \mu Y. \phi(Y) \equiv \nu Y. \neg \phi(\neg Y) \quad \neg \nu Y. \phi(Y) \equiv \mu Y. \neg \phi(\neg Y)$$

es posible para cada fórmula ϕ en el μ -calculus encontrar otra fórmula equivalente ϕ_p donde todas las negaciones estén directamente aplicadas a proposiciones atómicas o variables.

El μ -calculus: Alternación

El nivel de **alternación** de ϕ_p es definido como sigue:

- ▶ La alternación de una proposición atómica o de una variable es 0.
- ▶ La alternación de $\neg\phi$, $\phi \vee \phi'$, $\phi \wedge \phi'$, $\Diamond\phi$ y $\Box\phi$, es igual a la máxima alternación de una de sus subfórmulas.
- ▶ La alternación de $\phi_p \equiv \mu Y.\psi(Y)$ se define como el máximo entre:
 - ▶ la constante 1;
 - ▶ la alternación de ψ ; y
 - ▶ $1 +$ (la máxima alternación de una subfórmula de ϕ_p que sea de la forma $\nu Z.\alpha$ y que no sea subfórmula propia de ninguna otra fórmula de la forma $\nu Z'.\alpha'$).
- ▶ La alternación de $\phi_p \equiv \nu Y.\psi(Y)$ se define simétricamente.

El μ -calculus: Alternación

El nivel de **alternación** para una fórmula cualquiera ϕ del μ -calculus se define como el nivel de alternación de ϕ_p .

Ejemplo: El nivel de alternación de la siguiente fórmula es 2:

$$\nu Z. (a \wedge \Diamond(\mu Y. ((Z \wedge b) \vee (a \wedge \Diamond Y)))).$$