

Expresividad del μ -calculus

IIC3800

Pablo Barceló

Se puede demostrar un resultado bastante general:

Teorema

Para toda fórmula ϕ en CTL^ se puede generar una fórmula ψ en el μ -calculus (sin variables libres), tal que*

$$(\mathcal{M}, e) \models \phi \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{M}, e) \models \psi,$$

para todo sistema de transición $\mathcal{M}$ y estado e .

Es decir, el μ -calculus es más expresivo que CTL^* , y además se puede demostrar que ψ es a lo más de nivel de alternación 2.

Traducción de CTL en μ -calculus

Este resultado es difícil de demostrar, pero al menos demostraremos que el μ -calculus es más expresivo que CTL.

Definiremos primero una traducción α que a cada fórmula ϕ en CTL le asigna una fórmula $\alpha(\phi)$ en el μ -calculus:

$$\begin{aligned}\alpha(a) &:= a \\ \alpha(\neg\phi) &:= \neg\alpha(\phi) \\ \alpha(\phi \vee \phi') &:= \alpha(\phi) \vee \alpha(\phi') \\ \alpha(\mathbf{EX}\phi) &:= \Diamond\alpha(\phi) \\ \alpha(\mathbf{E}(\phi\mathbf{U}\phi')) &:= \mu Y.(\alpha(\phi') \vee (\alpha(\phi) \wedge \Diamond Y)) \\ \alpha(\mathbf{EG}\phi) &:= \nu Y.(\alpha(\phi) \wedge \Diamond Y)\end{aligned}$$

Traducción de CTL en μ -calculus

Se puede demostrar que

$$(\mathcal{M}, e) \models \phi \Leftrightarrow (\mathcal{M}, e) \models \alpha(\phi),$$

para todo sistema de transición $\mathcal{M}$, estado e , y fórmula ϕ en CTL.

La demostración es directa de nuestras anteriores consideraciones para todos los casos salvo para el último.

Analizaremos, por tanto, cuál es la semántica de la fórmula

$$\nu Y.(\alpha(\phi) \wedge \Diamond Y).$$

Semántica de la fórmula $\nu Y.(\alpha(\phi) \wedge \Diamond Y)$

Para demostrar que **EG** ϕ y $\nu Y.(\alpha(\phi) \wedge \Diamond Y)$ son equivalentes nos bastará con demostrar dos cosas:

- ▶ Para cualquier fórmula $\psi(Y)$, donde Y sólo aparece positivamente, $\nu Y.\psi(Y)$ computa el **mayor** punto fijo de la transformación definida por ψ .
- ▶ Para cualquier $\mathcal{M}$, el conjunto $E_{\mathbf{EG}\phi}$ de los estados e tal que $(\mathcal{M}, e) \models \mathbf{EG}\phi$ es el mayor punto fijo de la transformación definida por la fórmula $(\alpha(\phi) \wedge \Diamond Y)$.

$\nu Y.\psi(Y)$ es el mayor punto fijo de τ_ψ

Primero demostraremos que $\nu Y.\psi(Y)$ es el mayor punto fijo de la transformación definida por ψ .

De hecho,

$$\begin{aligned}\nu Y.\psi(Y) &= \frac{\neg\mu Y.\neg\psi(\neg Y)}{\quad} \\ &= \bigcap \{V \mid \overline{\psi(\overline{V})} \subseteq V\} \\ &= \bigcup \{\overline{V} \mid \overline{\psi(\overline{V})} \subseteq V\} \\ &= \bigcup \{\overline{V} \mid \overline{V} \subseteq \psi(\overline{V})\} \\ &= \bigcup \{V \mid V \subseteq \psi(V)\}\end{aligned}$$

$\mathbf{EG}\phi$ es el mayor punto fijo de $(\alpha(\phi) \wedge \Diamond Y)$

Ahora demostraremos que $E_{\mathbf{EG}\phi}$ es el mayor punto fijo de $\nu Y.(\alpha(\phi) \wedge \Diamond Y)$. Ya sabemos que la transformación definida por $\psi \equiv (\alpha(\phi) \wedge \Diamond Y)$ es monotónica.

Asuma que $j \geq 0$ es el menor j tal que $\tau_{\psi}^j(E) = \tau_{\psi}^{j+1}(E)$. Sabemos que $\tau_{\psi}^j(E)$ es el **mayor punto fijo** de la transformación τ_{ψ} .

Por tanto, si el estado e está en el mayor punto fijo de τ_{ψ} entonces:

- ▶ $(\mathcal{M}, e) \models \phi$, y
- ▶ existe un elemento e' tal que $R(e, e')$ es cierto en $\mathcal{M}$ y e' también está en el mayor punto fijo de τ_{ψ} .

EG ϕ es el mayor punto fijo de $\nu Y.(\alpha(\phi) \wedge \Diamond Y)$

Primero demostraremos que $E_{EG\phi}$ es un punto fijo de la transformación definida por $(\alpha(\phi) \wedge \Diamond Y)$.

Esto no es difícil, tan sólo basta demostrar que las siguientes fórmulas son equivalentes:

$$EG\phi \quad y \quad \alpha(\phi) \wedge \Diamond E_{EG\phi}$$

EG ϕ es el mayor punto fijo de $\nu Y.(\alpha(\phi) \wedge \Diamond Y)$

Hay que demostrar ahora que $E_{\mathbf{EG}\phi}$ es además el **mayor** punto fijo de la transformación definida por $(\alpha(\phi) \wedge \Diamond Y)$.

Basta entonces demostrar que $E_{\mathbf{EG}\phi} = \bigcap_i \tau_\psi^i(E)$.

Para demostrar que $\bigcap_i \tau_\psi^i(E) \subseteq E_{\mathbf{EG}\phi}$:

- ▶ Tome un elemento $e \in \bigcap_i \tau_\psi^i(E)$. Por tanto, e está en el mayor punto fijo de τ_ψ .
- ▶ Por observaciones anteriores, existe camino infinito π desde e tal que todo elemento e' en π satisface ϕ .
- ▶ Concluimos que $(\mathcal{M}, e) \models \mathbf{EG}\phi$, i.e. $e \in E_{\mathbf{EG}\phi}$.

$\mathbf{EG}\phi$ es el mayor punto fijo de $\nu Y.(\alpha(\phi) \wedge \Diamond Y)$

Para la otra dirección, $E_{\mathbf{EG}\phi} \subseteq \bigcap_i \tau_\psi^i(E)$, demostraremos por inducción lo siguiente:

$$E_{\mathbf{EG}\phi} \subseteq \tau_\psi^i(E), \quad \text{para todo } i \geq 0.$$

El caso base es trivial.

Asuma en el paso inductivo que $e \in E_{\mathbf{EG}\phi}$ y que $E_{\mathbf{EG}\phi} \subseteq \tau_\psi^i(E)$. Dado que τ_ψ es monotónico se tiene que

$$\tau_\psi(E_{\mathbf{EG}\phi}) \subseteq \tau_\psi^{i+1}(E).$$

Pero ya sabemos, que $\tau_\psi(E_{\mathbf{EG}\phi}) = E_{\mathbf{EG}\phi}$. Por tanto, $e \in \tau_\psi^{i+1}(E)$.

El μ -calculus y la bisimulación

Demostraremos que las fórmulas sin variables libres en el μ -calculus son preservadas bajo **bisimulación**.

Esto es,

Teorema

Para todo par de sistemas de transición $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$, y estados e en $\mathcal{M}$ y e' en $\mathcal{M}'$ se cumple que

$$(\mathcal{M}, e) \sim (\mathcal{M}', e') \Rightarrow ((\mathcal{M}, e) \models \phi \Leftrightarrow (\mathcal{M}', e') \models \phi),$$

donde ϕ es una fórmula cualquiera en el μ -calculus que no tiene variables libres.

El μ -calculus y la bisimulación: Demostración

Para demostrar el teorema, defina para cada fórmula en el μ -calculus de la forma $\mu Y. \phi(Y)$ la siguiente sucesión de fórmulas:

$$(\mu Y. \phi(Y))^0 := \perp \quad (\mu Y. \phi(Y))^{i+1} := \phi(Y \rightarrow (\mu Y. \phi(Y))^i).$$

Por tanto, cada $(\mu Y. \phi(Y))^j$ es una fórmula en un fragmento de CTL*.

El siguiente lemma es bastante evidente:

Lemma

Si $\mathcal{M}$ es un sistema de transición tal que $|E| \leq n$, entonces para todo estado e y $n \leq m$,

$$(\mathcal{M}, e) \models \mu Y. \phi(Y) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, e) \models (\mu Y. \phi(Y))^m.$$

El μ -calculus y la bisimulación: Demostración

Luego, asuma que $(\mathcal{M}, e) \sim (\mathcal{M}', e')$, y sea $m = \max\{|E|, |E'|\}$.

Sea $m(\phi)$ la fórmula obtenida al reemplazar cualquier $\mu Z.\psi(Z)$ en ϕ con $(\mu Z.\psi(Z))^m$.

Por nuestro resultado de comienzo de semestre,

$$(\mathcal{M}, e) \models m(\phi) \Leftrightarrow (\mathcal{M}', e') \models m(\phi).$$

Concluimos que $(\mathcal{M}, e) \models \phi \Leftrightarrow (\mathcal{M}', e') \models \phi$.

Puntos fijos simultaneos

Podríamos extender el μ -calculus con **puntos fijos** simultaneos:

Sea $\Phi = \{\phi_1(Y_1, \dots, Y_n), \dots, \phi_n(Y_1, \dots, Y_n)\}$ un conjunto de fórmulas en el μ -calculus, tal que para cada $i, j \leq n$, V_i aparece sólo positivamente en ϕ_j .

Cada ϕ_i define una transformación $\tau_{\phi_i} : (2^E)^n \rightarrow 2^E$ de la forma natural:

$$\tau_{\phi_i}(V_1, \dots, V_n) = \{e \mid (\mathcal{M}, e) \models \phi_i(Y_1 \rightarrow V_1, \dots, Y_n \rightarrow V_n)\}.$$

Por tanto, podemos definir una transformación $\tau_\Phi : (2^E)^n \rightarrow (2^E)^n$ como:

$$\tau_\Phi(V_1, \dots, V_n) = (\tau_{\phi_1}(V_1, \dots, V_n), \dots, \tau_{\phi_n}(V_1, \dots, V_n)).$$

Puntos fijos simultaneos

Como antes, decimos que $(V_1, \dots, V_n)$ es un punto fijo de τ_Φ si $\tau_\Phi(V_1, \dots, V_n) = (V_1, \dots, V_n)$.

Además, si para cualquier otro punto fijo $(V'_1, \dots, V'_n)$ se tiene que $V'_1 \subseteq V_1, \dots, V'_n \subseteq V_n$, entonces $(V_1, \dots, V_n)$ es el **menor punto fijo** de τ_Φ

Como antes, podemos demostrar que el menor punto fijo de τ_Φ es el menor $j \geq 0$ tal que $\tau_\Phi^j(\emptyset, \dots, \emptyset) = \tau_\Phi^{j+1}(\emptyset, \dots, \emptyset)$ (equivalentemente, el mayor punto fijo).

El μ -calculus con puntos fijos simultaneos

El μ -calculus con puntos fijos simultaneos es la extensión del μ -calculus con la siguiente regla sintáctica:

Sea $\Phi = \{\phi_1(Y_1, \dots, Y_n), \dots, \phi_n(Y_1, \dots, Y_n)\}$ un conjunto de fórmulas en el μ -calculus con puntos fijos simultaneos, tal que para cada $i, j \leq n$, V_i aparece sólo positivamente en ϕ_j .

Entonces para cada $i \leq n$,

$\mu Y_1 \cdots \mu Y_n. (\phi_1(Y_1, \dots, Y_n), \dots, \phi_n(Y_1, \dots, Y_n))[i]$ es también una fórmula en el μ -calculus con puntos fijos simultaneos.

La semántica es la natural:

$(\mathcal{M}, e) \models \mu Y_1 \cdots \mu Y_n. (\phi_1(Y_1, \dots, Y_n), \dots, \phi_n(Y_1, \dots, Y_n))[i]$ si y sólo si e pertenece a la i -ésima componente del menor punto fijo de la transformación τ_Φ .

El μ -calculus con puntos fijos simultaneos: Expresividad

Ejercicio: Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un autómata **determinista** que opera sobre palabras **finitas**. Demuestre que existe una fórmula $\phi_{\mathcal{A}}$ en el μ -calculus con puntos fijos simultaneos, tal que para toda secuencia finita $\bar{w} = a_0 \cdots a_n$ en Σ ,

$$(\bar{w}, 0) \models \phi_{\mathcal{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \text{ acepta a } \bar{w}.$$

Pregunta: ¿Qué nos dice ésto acerca de la expresividad del μ -calculus con puntos fijos simultaneos sobre palabras finitas?

El μ -calculus con puntos fijos simultaneos: Expresividad

Pregunta: ¿Se puede “codificar” el autómata en el μ -calculus sin operadores de punto fijo simultaneos?

La respuesta es sí, aunque ésto no es fácil de demostrar.

Demostraremos algo aún más general:

Teorema

Para toda fórmula ϕ en el μ -calculus con puntos fijos simultaneos existe una fórmula ψ en el μ -calculus, tal que

$$(\mathcal{M}, \sigma, e) \models \phi \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{M}, \sigma, e) \models \psi,$$

para todo sistema de transición $\mathcal{M}$, valuación σ , y estado e .

Demostración del teorema

Asumiremos que Φ es de la forma $\{\phi_1(Y_1, Y_2), \phi_2(Y_1, Y_2)\}$. El caso más general puede probarse extendiendo este caso.

Para un conjunto $D \subseteq E$, defina dos operadores $F_2^D : 2^E \rightarrow 2^E$ y $G_1 : 2^E \rightarrow 2^E$ como sigue:

$$\begin{aligned} F_2^D(V) &= \phi_2(Y_1 \rightarrow D, Y_2 \rightarrow V) \\ G_1(V) &= \phi_1(Y_1 \rightarrow V, Y_2 \rightarrow \mathbf{lfp}(F_2^V)), \end{aligned}$$

donde de ahora en adelante **lfp** representa el menor punto fijo de un operador.

Pregunta: ¿Cómo sabemos que $\mathbf{lfp}(F_2^D)$ está bien definido?
Note que G_1 también es un operador monotónico.

Demostración del teorema

Para demostrar el teorema será suficiente demostrar antes el siguiente lemma.

Lemma (Principio de Bekic)

El menor punto fijo de G_1 es precisamente la primera componente del menor punto fijo de τ_Φ .

De hecho, si el lemma es cierto, entonces la primera componente del menor punto fijo de τ_Φ puede ser expresada como:

$$\mu Y. \phi_1(Y, \mu Z. \phi_2(Y, Z)),$$

y la segunda componente puede ser expresada de foma análoga.

Demostración del teorema

Falta, por tanto, tan sólo demostrar el lemma. Denotaremos la primera componente de $\mathbf{lfp}(\tau_\Phi)$ por V_1 y la segunda por V_2 .

Note, primero, que $\mathbf{lfp}(F_2^{V_1}) \subseteq V_2$, ya que $F_2^{V_1}(V_2) = \phi_2(Y_1 \rightarrow V_1, Y_2 \rightarrow V_2) = V_2$.

Luego,

$$G_1(V_1) = \phi_1(Y_1 \rightarrow V_1, \mathbf{lfp}(F_2^{V_1})) \subseteq V_1.$$

Por tanto, $\mathbf{lfp}(G_1) \subseteq V_1$, lo que demuestra una dirección de la equivalencia.

Demostración del teorema

En la otra dirección será suficiente demostrar por inducción que para todo $i \geq 0$,

$$\tau_{\Phi}^i(\emptyset, \emptyset) \subseteq (\mathbf{lfp}(G_1), \mathbf{lfp}(F_2^{\mathbf{lfp}(G_1)})),$$

donde la inclusión aquí se refiere a componente a componente.

Para $i = 0$ esto es inmediato.

Asuma para i . Luego, si $\tau_{\Phi}^i(\emptyset, \emptyset) = (U_1^i, U_2^i)$, entonces

$$\begin{aligned} U_1^{i+1} = \phi_1(U_1^i, U_2^i) &\subseteq \phi_1(\mathbf{lfp}(G_1), \mathbf{lfp}(F_2^{\mathbf{lfp}(G_1)})) = \\ &G_1(\mathbf{lfp}(G_1)) = \mathbf{lfp}(G_1), \end{aligned}$$

y, además,

$$\begin{aligned} U_2^{i+1} = \phi_2(U_1^i, U_2^i) &\subseteq \phi_2(\mathbf{lfp}(G_1), \mathbf{lfp}(F_2^{\mathbf{lfp}(G_1)})) = \\ &F_2^{\mathbf{lfp}(G_1)}(\mathbf{lfp}(F_2^{\mathbf{lfp}(G_1)})) = \mathbf{lfp}(F_2^{\mathbf{lfp}(G_1)}). \end{aligned}$$