

Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

Para simplificar el proceso de construcción, usamos una generalización de los autómatas de Büchi:

Definición

$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{G})$ es un autómata de *Büchi generalizado* sobre Σ si:

- ▶ Q es un conjunto finito de estados;
- ▶ $Q_0 \subseteq Q$ es un conjunto no vacío de estados iniciales;
- ▶ $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ es una función de transición;
- ▶ $\mathcal{G} = \{F_1, \dots, F_n\}$, donde $F_i \subseteq Q$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Autómatas de Büchi generalizado: Condición de aceptación

Dado: $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G} = \{F_1, \dots, F_n\}$.

Definición

$\mathcal{A}$ acepta una palabra infinita w si existe una ejecución ρ de $\mathcal{A}$ sobre w tal que $\text{Inf}(\rho) \cap F_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Nótese que $\mathcal{G}$ puede ser vacío.

- En este caso $\mathcal{A}$ acepta una palabra infinita w si existe una ejecución ρ de $\mathcal{A}$ sobre w .

Proposición

Para cada autómata de Büchi generalizado $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{G})$ tal que $\mathcal{G} = \{F_1, \dots, F_n\}$, $n \geq 1$ y Q tiene m estados, *existe un autómata de Büchi $\mathcal{B}$ con $O(m \cdot n)$ estados tal que $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{B})$.*

Ejercicio: Demuestre la proposición.

¿Qué sucede con el caso $\mathcal{G} = \emptyset$? ¿Qué autómata de Büchi es equivalente a $\mathcal{A}$?

Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

Dado: Fórmula φ en LTL positivo sobre un alfabeto Σ .

Definimos un autómata de Büchi generalizado

$\mathcal{A}_\varphi = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{G})$ de la siguiente forma:

Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

Dado: Fórmula φ en LTL positivo sobre un alfabeto Σ .

Definimos un autómata de Büchi generalizado

$\mathcal{A}_\varphi = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{G})$ de la siguiente forma:

1. Q está formado por todos los **subconjuntos X de $\text{cl}(\varphi)$** tales que:

Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

Dado: Fórmula φ en LTL positivo sobre un alfabeto Σ .

Definimos un autómata de Büchi generalizado

$\mathcal{A}_\varphi = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{G})$ de la siguiente forma:

1. Q está formado por todos los **subconjuntos X de $\text{cl}(\varphi)$** tales que:

► para todo $a \in \Sigma$: **Si $a \in X$, entonces $\neg a \notin X$;**

Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

Dado: Fórmula φ en LTL positivo sobre un alfabeto Σ .

Definimos un autómata de Büchi generalizado

$\mathcal{A}_\varphi = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{G})$ de la siguiente forma:

1. Q está formado por todos los subconjuntos X de $\text{cl}(\varphi)$ tales que:
 - ▶ para todo $a \in \Sigma$: Si $a \in X$, entonces $\neg a \notin X$;
 - ▶ para todo par $a, b \in \Sigma$ tal que $a \neq b$: Si $a \in X$, entonces $b \notin X$.

Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

Dado: Fórmula φ en LTL positivo sobre un alfabeto Σ .

Definimos un autómata de Büchi generalizado

$\mathcal{A}_\varphi = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{G})$ de la siguiente forma:

1. Q está formado por todos los **subconjuntos X de $\text{cl}(\varphi)$** tales que:
 - ▶ para todo $a \in \Sigma$: **Si $a \in X$, entonces $\neg a \notin X$;**
 - ▶ para todo par $a, b \in \Sigma$ tal que $a \neq b$: **Si $a \in X$, entonces $b \notin X$.**
 - ▶ si $\psi \vee \theta \in X$, entonces $\psi \in X$ o $\theta \in X$;

Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

Dado: Fórmula φ en LTL positivo sobre un alfabeto Σ .

Definimos un autómata de Büchi generalizado

$\mathcal{A}_\varphi = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{G})$ de la siguiente forma:

1. Q está formado por todos los **subconjuntos X de $\text{cl}(\varphi)$** tales que:
 - ▶ para todo $a \in \Sigma$: **Si $a \in X$, entonces $\neg a \notin X$** ;
 - ▶ para todo par $a, b \in \Sigma$ tal que $a \neq b$: **Si $a \in X$, entonces $b \notin X$** .
 - ▶ si $\psi \vee \theta \in X$, entonces $\psi \in X$ o $\theta \in X$;
 - ▶ si $\psi \wedge \theta \in X$, entonces $\psi \in X$ y $\theta \in X$.

2. Q_0 es el conjunto de todos los $X \in Q$ tales que $\varphi \in X$.

Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

2. Q_0 es el conjunto de todos los $X \in Q$ tales que $\varphi \in X$.
3. Dados $X, Y \in Q$ y $a \in \Sigma$, se tiene que $Y \in \delta(X, a)$ si:

Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

2. Q_0 es el conjunto de todos los $X \in Q$ tales que $\varphi \in X$.
3. Dados $X, Y \in Q$ y $a \in \Sigma$, se tiene que $Y \in \delta(X, a)$ si:
 - ▶ $\neg a \notin X$;

Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

2. Q_0 es el conjunto de todos los $X \in Q$ tales que $\varphi \in X$.
3. Dados $X, Y \in Q$ y $a \in \Sigma$, se tiene que $Y \in \delta(X, a)$ si:
 - ▶ $\neg a \notin X$;
 - ▶ $b \notin X$ para todo $b \in \Sigma$ tal que $b \neq a$;

Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

2. Q_0 es el conjunto de todos los $X \in Q$ tales que $\varphi \in X$.
3. Dados $X, Y \in Q$ y $a \in \Sigma$, se tiene que $Y \in \delta(X, a)$ si:
 - ▶ $\neg a \notin X$;
 - ▶ $b \notin X$ para todo $b \in \Sigma$ tal que $b \neq a$;
 - ▶ si $\mathbf{X}\psi \in X$, entonces $\psi \in Y$;

Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

2. Q_0 es el conjunto de todos los $X \in Q$ tales que $\varphi \in X$.
3. Dados $X, Y \in Q$ y $a \in \Sigma$, se tiene que $Y \in \delta(X, a)$ si:
 - ▶ $\neg a \notin X$;
 - ▶ $b \notin X$ para todo $b \in \Sigma$ tal que $b \neq a$;
 - ▶ si $\mathbf{X}\psi \in X$, entonces $\psi \in Y$;
 - ▶ si $\psi \mathbf{U}\theta \in X$, entonces $\theta \in X$ o $(\psi \in X \text{ y } \psi \mathbf{U}\theta \in Y)$;

Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

2. Q_0 es el conjunto de todos los $X \in Q$ tales que $\varphi \in X$.
3. Dados $X, Y \in Q$ y $a \in \Sigma$, se tiene que $Y \in \delta(X, a)$ si:
 - ▶ $\neg a \notin X$;
 - ▶ $b \notin X$ para todo $b \in \Sigma$ tal que $b \neq a$;
 - ▶ si $\mathbf{X}\psi \in X$, entonces $\psi \in Y$;
 - ▶ si $\psi \mathbf{U}\theta \in X$, entonces $\theta \in X$ o $(\psi \in X \text{ y } \psi \mathbf{U}\theta \in Y)$;
 - ▶ si $\psi \mathbf{R}\theta \in X$, entonces $\theta \in X$ y $(\psi \in X \text{ o } \psi \mathbf{R}\theta \in Y)$.

Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

Hasta ahora hemos codificado las condiciones 1-6 para las funciones de etiquetado.

Vamos a usar los estados finales para codificar la condición 7:

Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

Hasta ahora hemos codificado las condiciones 1-6 para las funciones de etiquetado.

Vamos a usar los estados finales para codificar la condición 7:

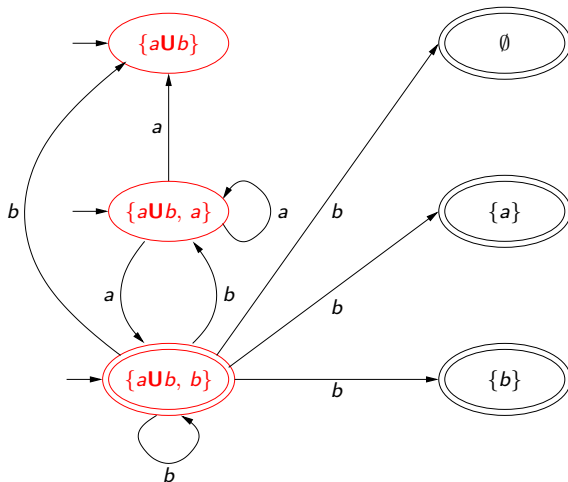
4. Suponga que $\psi_1 \mathbf{U} \theta_1, \psi_2 \mathbf{U} \theta_2, \dots, \psi_k \mathbf{U} \theta_k$ son todos los elementos de $\text{cl}(\varphi)$ de la forma $\psi \mathbf{U} \theta$.

Entonces: $\mathcal{G}$ es definido como $\{F_1, \dots, F_k\}$, donde

$$F_i = \{X \in Q \mid (\psi_i \mathbf{U} \theta_i \in X \text{ y } \theta_i \in X) \text{ o } \psi_i \mathbf{U} \theta_i \notin X\}.$$

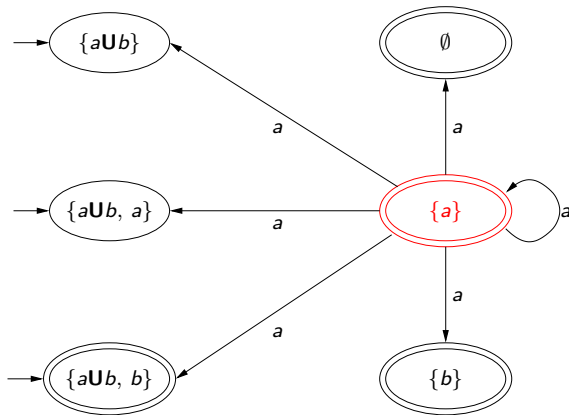
Ejemplo: Construcción de Vardi & Wolper para aUb

Suponga que $\Sigma = \{a, b, c\}$. Las transiciones para los estados $\{aUb\}$, $\{aUb, a\}$ y $\{aUb, b\}$ son:



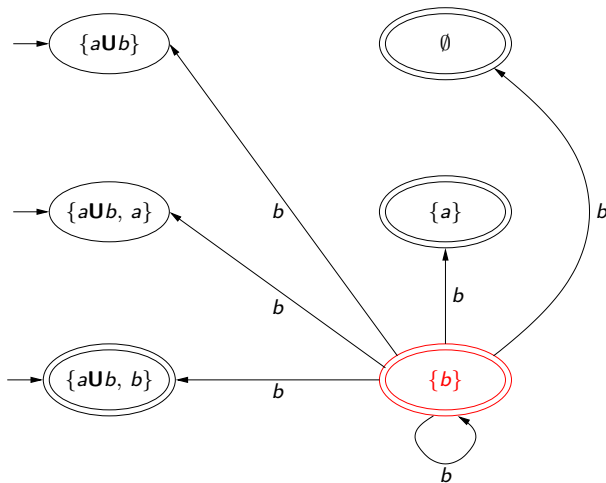
Ejemplo: Construcción de Vardi & Wolper para aUb

Transiciones para el estado $\{a\}$:



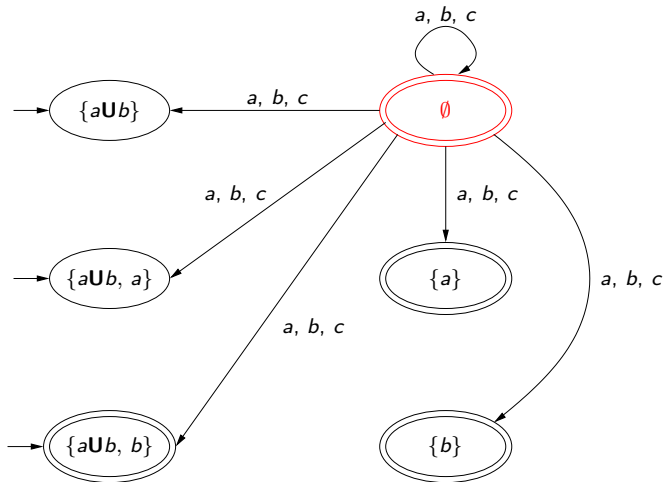
Ejemplo: Construcción de Vardi & Wolper para aUb

Transiciones para el estado $\{b\}$:



Ejemplo: Construcción de Vardi & Wolper para aUb

Transiciones para el estado $\emptyset$:



Construcción de Vardi & Wolper: Comentarios finales

¿Por qué funciona la construcción de Vardi & Wolper?

Este lema nos asegura que la construcción funciona correctamente:

Lema

Dada una fórmula φ en LTL sobre un alfabeto Σ y una palabra $w \in \Sigma^\omega$:

- 1. Para cada función de etiquetado ξ para φ sobre w tal que $\varphi \in \xi(0)$, existe una ejecución ρ de φ sobre w tal que $\rho(i) = \xi(i)$ para cada $i \geq 0$ y $\text{Inf}(\rho) \cap F \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathcal{G}$.*
- 2. Para cada ejecución ρ de φ sobre w tal que $\text{Inf}(\rho) \cap F \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathcal{G}$, existe una función de etiquetado ξ para φ sobre w tal que $\xi(i) = \rho(i)$ para cada $i \geq 0$ y $\varphi \in \xi(0)$.*

Construcción de Vardi & Wolper: Comentarios finales

Preguntas para responder:

- ▶ ¿Cómo se demuestra el lema?
- ▶ ¿Cómo puede ser usado el lema para demostrar que la construcción de Vardi & Wolper funciona correctamente?

Una última pregunta:

- ▶ Antes aseguramos que el autómata $\mathcal{A}_\varphi$ generado por la construcción era un **autómata de Büchi con $2^{O(\|\varphi\|)}$ estados**.
¿Por qué es cierto esto?