Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

Para simplificar el proceso de construcción, usamos una generalización de los autómatas de Büchi:

Definición

$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{G})$ *es un autómata de Büchi generalizado sobre* Σ *si:*

- Q *es un conjunto finito de estados;*
- $Q_0 \subseteq Q$ *es un conjunto no vacío de estados iniciales;*
- $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ *es una función de transición;*
- $\mathcal{G} = \{F_1, \ldots, F_n\}$*, donde* $F_i \subseteq Q$ *para cada* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Autómatas de Büchi generalizado: Condición de aceptación

Dado: $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G} = \{F_1, \ldots, F_n\}$.

Definición

$\mathcal{A}$ acepta una palabra infinita w si existe una ejecución ρ de $\mathcal{A}$ sobre w tal que $\mathit{Inf}(\rho) \cap F_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Nótese que $\mathcal{G}$ puede ser vacío.

- En este caso $\mathcal{A}$ acepta una palabra infinita w si existe una ejecución ρ de $\mathcal{A}$ sobre w.

Transformación de autómatas de Büchi generalizado

Proposición

Para cada autómata de Büchi generalizado $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{G})$ tal que $\mathcal{G} = \{F_1, \ldots, F_n\}$, $n \geq 1$ y Q tiene m estados, existe un autómata de Büchi $\mathcal{B}$ con $O(m \cdot n)$ estados tal que $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{B})$.

Ejercicio: Demuestre la proposición.

¿Qué sucede con el caso $\mathcal{G} = \emptyset$? ¿Qué autómata de Büchi es equivalente a $\mathcal{A}$?

Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

Dado: Fórmula φ en LTL positivo sobre un alfabeto Σ.

Definimos un autómata de Büchi generalizado $\mathcal{A}_\varphi = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{G})$ de la siguiente forma:

1. Q está formado por todos los subconjuntos X de $\text{cl}(\varphi)$ tales que:
   - para todo $a \in \Sigma$: Si $a \in X$, entonces $\neg a \notin X$;
   - para todo par $a, b \in \Sigma$ tal que $a \neq b$: Si $a \in X$, entonces $b \notin X$.
   - si $\psi \vee \theta \in X$, entonces $\psi \in X$ o $\theta \in X$;
   - si $\psi \wedge \theta \in X$, entonces $\psi \in X$ y $\theta \in X$.

Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

2. Q_0 es el conjunto de todos los $X \in Q$ tales que $\varphi \in X$.

3. Dados $X, Y \in Q$ y $a \in \Sigma$, se tiene que $Y \in \delta(X, a)$ si:

   - $\neg a \notin X$;
   - $b \notin X$ para todo $b \in \Sigma$ tal que $b \neq a$;
   - si $\mathbf{X}\psi \in X$, entonces $\psi \in Y$;
   - si $\psi \mathbf{U} \theta \in X$, entonces $\theta \in X$ o $(\psi \in X$ y $\psi \mathbf{U} \theta \in Y)$;
   - si $\psi \mathbf{R} \theta \in X$, entonces $\theta \in X$ y $(\psi \in X$ o $\psi \mathbf{R} \theta \in Y)$.

Construcción de Vardi & Wolper: Paso final

Hasta ahora hemos codificado las condiciones 1-6 para las funciones de etiquetado.

Vamos a usar los estados finales para codificar la condición 7:

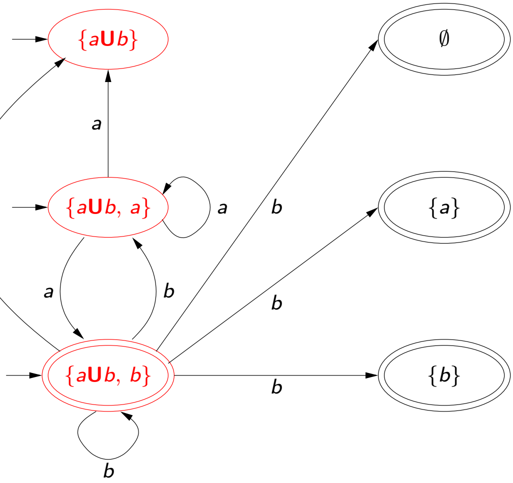
4. Suponga que $\psi_1 \mathbf{U} \theta_1$, $\psi_2 \mathbf{U} \theta_2$, ..., $\psi_k \mathbf{U} \theta_k$ son todos los elementos de cl(φ) de la forma $\psi \mathbf{U} \theta$.

   Entonces: $\mathcal{G}$ es definido como $\{F_1, \ldots, F_k\}$, donde

$$F_i \;=\; \{X \in Q \mid (\psi_i \mathbf{U} \theta_i \in X \text{ y } \theta_i \in X) \text{ o } \psi_i \mathbf{U} \theta_i \notin X\}.$$

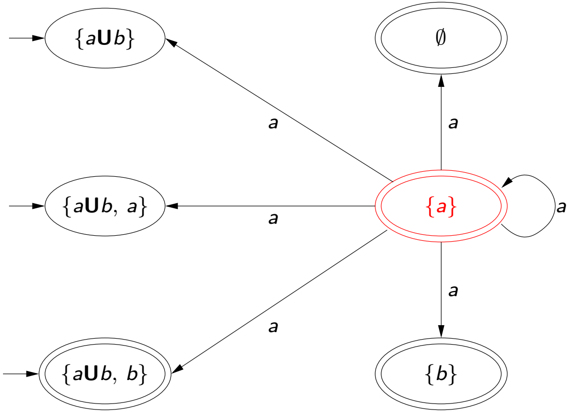
Ejemplo: Construcción de Vardi & Wolper para $a\mathbf{U}b$

Suponga que $\Sigma = \{a, b, c\}$. Las transiciones para los estados $\{a\mathbf{U}b\}$, $\{a\mathbf{U}b,\ a\}$ y $\{a\mathbf{U}b,\ b\}$ son:



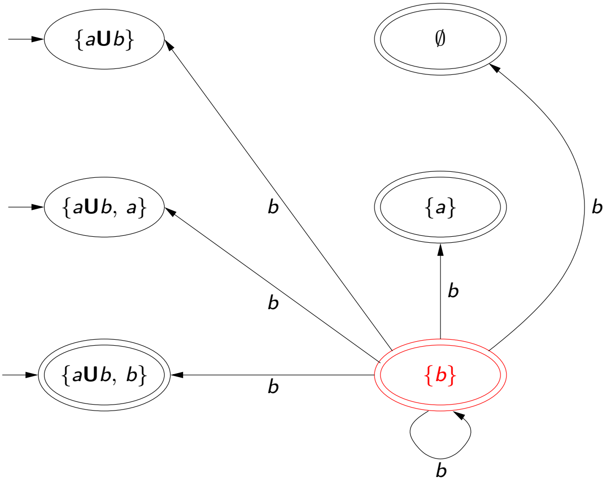
Ejemplo: Construcción de Vardi & Wolper para $a\mathbf{U}b$

Transiciones para el estado $\{a\}$:



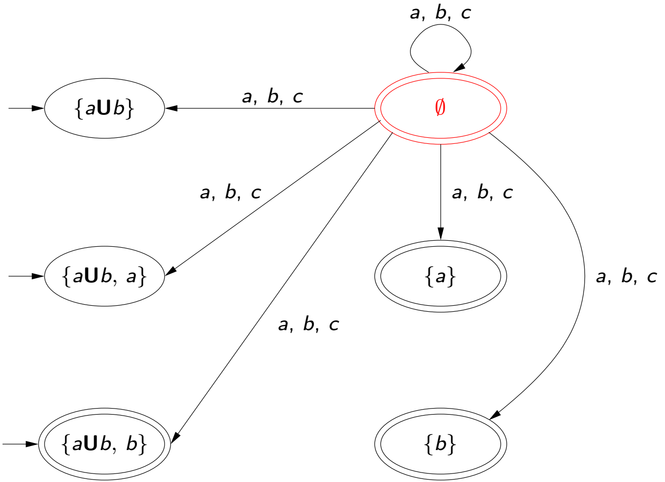
Ejemplo: Construcción de Vardi & Wolper para $a\mathbf{U}b$

Transiciones para el estado $\{b\}$:



Ejemplo: Construcción de Vardi & Wolper para $a\mathbf{U}b$

Transiciones para el estado $\emptyset$:



Construcción de Vardi & Wolper: Comentarios finales

¿Por qué funciona la construcción de Vardi & Wolper?

Este lema nos asegura que la construcción funciona correctamente:

Lema

Dada una fórmula φ en LTL sobre un alfabeto Σ y una palabra $w \in \Sigma^\omega$:

1. *Para cada función de etiquetado ξ para φ sobre w tal que $\varphi \in \xi(0)$, existe una ejecución ρ de φ sobre w tal que $\rho(i) = \xi(i)$ para cada $i \geq 0$ y $Inf(\rho) \cap F \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathcal{G}$.*

2. *Para cada ejecución ρ de φ sobre w tal que $Inf(\rho) \cap F \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathcal{G}$, existe una función de etiquetado ξ para φ sobre w tal que $\xi(i) = \rho(i)$ para cada $i \geq 0$ y $\varphi \in \xi(0)$.*

Construcción de Vardi & Wolper: Comentarios finales

Preguntas para responder:

- ¿Cómo se demuestra el lema?
- ¿Cómo puede ser usado el lema para demostrar que la construcción de Vardi & Wolper funciona correctamente?

Una última pregunta:

- Antes aseguramos que el autómata $\mathcal{A}_\varphi$ generado por la construcción era un autómata de Büchi con $2^{O(\|\varphi\|)}$ estados. ¿Por qué es cierto esto?