

Vamos a ver cuál es la conexión entre los autómatas sobre palabras infinitas y verificación.

- ▶ Esta conexión es la base del algoritmo de verificación para LTL.

LTL sobre palabras infinitas

Dado alfabeto Σ y $w = a_0a_1a_2 \cdots \in \Sigma^\omega$:

► $w^i = a_i a_{i+1} a_{i+2} \cdots$

Una palabra infinita $w = a_0a_1a_2 \cdots$ corresponde a un camino en un sistema de transición.

Semántica de LTL sobre palabras infinitas:

- $w \models a$ si y sólo si $a_0 = a$;
- $w \models \neg\varphi$ si y sólo si $w \not\models \varphi$;
- $w \models \varphi \vee \psi$ si y sólo si $w \models \varphi$ o $w \models \psi$;
- $w \models \mathbf{X}\varphi$ si y sólo si $w^1 \models \varphi$;
- $w \models \varphi \mathbf{U} \psi$ si y sólo si existe $i \geq 0$ tal que $w^i \models \psi$ y para todo j tal que $0 \leq j < i$ se tiene que $w^j \models \varphi$.

Notación: $\|\varphi\|$ es el largo de una fórmula LTL φ .

El siguiente teorema es fundamental para la verificación de propiedades expresada en LTL:

Teorema (Vardi & Wolper)

Para cada fórmula en LTL φ sobre un alfabeto Σ , existe un autómata de Büchi $\mathcal{A}_\varphi$ con $2^{O(\|\varphi\|)}$ estados tal que

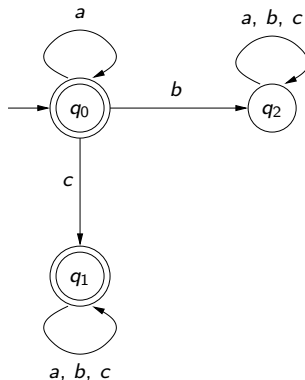
$$L_\omega(\mathcal{A}_\varphi) = \{w \in \Sigma^\omega \mid w \models \varphi\}.$$

Autómata y LTL: Un ejemplo

Ejercicio: Suponga que $\Sigma = \{a, b, c\}$. Construya un autómata equivalente a $\mathcal{A}_{\neg(a \mathbf{U} b)}$.

Autómata y LTL: Un ejemplo

Ejercicio: Suponga que $\Sigma = \{a, b, c\}$. Construya un autómata equivalente a $\mathcal{A}_{\neg(aUb)}$.



Construcción de Vardi & Wolper: LTL positivo

Para hacer la traducción de LTL a autómatata vamos a usar la siguiente lógica **LTL positivo**:

$$\begin{aligned} \psi, \psi' \quad := \quad & a \ (a \in \Sigma) \mid \neg a \ (a \in \Sigma) \mid \psi \vee \psi' \mid \psi \wedge \psi' \\ & \mathbf{X}\psi \mid \psi \mathbf{U}\psi' \mid \psi \mathbf{R}\psi' \end{aligned}$$

Semántica de **R** (release):

- $w \models \varphi \mathbf{R}\psi$ si y sólo si para todo $i \geq 0$ tal que $w^i \not\models \psi$, se tiene que existe j tal que $0 \leq j < i$ y $w^j \models \varphi$.

Construcción de Vardi & Wolper: LTL positivo

¿Por qué podemos usar LTL positivo?

Proposición

Para cada fórmula φ en LTL existe una fórmula equivalente ψ en LTL positivo tal que $\|\psi\|$ es $O(\|\varphi\|)$.

Ejercicio: Demuestre la proposición. ¿Cuál es el largo de ψ como función del largo de φ ?

Construcción de Vardi & Wolper: LTL positivo

Ahora vamos a demostrar lo siguiente:

Proposición

*Para cada fórmula en **LTL positivo** φ sobre un alfabeto Σ , existe un autómata de Büchi $\mathcal{A}_\varphi$ con $2^{O(\|\varphi\|)}$ estados tal que*
$$L_\omega(\mathcal{A}_\varphi) = \{w \in \Sigma^\omega \mid w \models \varphi\}.$$

De esto se concluye que hay una construcción exponencial para LTL.

Construcción de Vardi & Wolper: Clausura

La clausura de una fórmula φ es definida de la siguiente forma:

- ▶ $\varphi \in \text{cl}(\varphi)$;
- ▶ Si $\psi \wedge \theta \in \text{cl}(\varphi)$, entonces $\psi \in \text{cl}(\varphi)$ y $\theta \in \text{cl}(\varphi)$;
- ▶ Si $\psi \vee \theta \in \text{cl}(\varphi)$, entonces $\psi \in \text{cl}(\varphi)$ y $\theta \in \text{cl}(\varphi)$;
- ▶ Si $\mathbf{X}\psi \in \text{cl}(\varphi)$, entonces $\psi \in \text{cl}(\varphi)$;
- ▶ Si $\psi \mathbf{U}\theta \in \text{cl}(\varphi)$, entonces $\psi \in \text{cl}(\varphi)$ y $\theta \in \text{cl}(\varphi)$;
- ▶ Si $\psi \mathbf{R}\theta \in \text{cl}(\varphi)$, entonces $\psi \in \text{cl}(\varphi)$ y $\theta \in \text{cl}(\varphi)$.

Ejemplo: $\text{cl}(a\mathbf{U}\neg b) =$

Construcción de Vardi & Wolper: Clausura

La clausura de una fórmula φ es definida de la siguiente forma:

- ▶ $\varphi \in \text{cl}(\varphi)$;
- ▶ Si $\psi \wedge \theta \in \text{cl}(\varphi)$, entonces $\psi \in \text{cl}(\varphi)$ y $\theta \in \text{cl}(\varphi)$;
- ▶ Si $\psi \vee \theta \in \text{cl}(\varphi)$, entonces $\psi \in \text{cl}(\varphi)$ y $\theta \in \text{cl}(\varphi)$;
- ▶ Si $\mathbf{X}\psi \in \text{cl}(\varphi)$, entonces $\psi \in \text{cl}(\varphi)$;
- ▶ Si $\psi \mathbf{U}\theta \in \text{cl}(\varphi)$, entonces $\psi \in \text{cl}(\varphi)$ y $\theta \in \text{cl}(\varphi)$;
- ▶ Si $\psi \mathbf{R}\theta \in \text{cl}(\varphi)$, entonces $\psi \in \text{cl}(\varphi)$ y $\theta \in \text{cl}(\varphi)$.

Ejemplo: $\text{cl}(a\mathbf{U}\neg b) = \{(a\mathbf{U}\neg b), a, \neg b\}$

Construcción de Vardi & Wolper: Funciones de etiquetado

Dado: Alfabeto Σ y una fórmula φ en LTL positivo sobre Σ .

Una función $\xi : \mathbb{N} \rightarrow 2^{\text{cl}(\varphi)}$ es una **función de etiquetado** para φ sobre $w = a_0a_1a_2 \cdots \in \Sigma^\omega$ si:

Construcción de Vardi & Wolper: Funciones de etiquetado

Dado: Alfabeto Σ y una fórmula φ en LTL positivo sobre Σ .

Una función $\xi : \mathbb{N} \rightarrow 2^{\text{cl}(\varphi)}$ es una **función de etiquetado** para φ sobre $w = a_0a_1a_2\cdots \in \Sigma^\omega$ si:

1. Para cada $a \in \Sigma$: Si $a \in \xi(i)$, entonces $a_i = a$, y si $\neg a \in \xi(i)$, entonces $a_i \neq a$.

Construcción de Vardi & Wolper: Funciones de etiquetado

Dado: Alfabeto Σ y una fórmula φ en LTL positivo sobre Σ .

Una función $\xi : \mathbb{N} \rightarrow 2^{\text{cl}(\varphi)}$ es una **función de etiquetado** para φ sobre $w = a_0a_1a_2\cdots \in \Sigma^\omega$ si:

1. Para cada $a \in \Sigma$: Si $a \in \xi(i)$, entonces $a_i = a$, y si $\neg a \in \xi(i)$, entonces $a_i \neq a$.
2. Si $\psi \vee \theta \in \xi(i)$, entonces $\psi \in \xi(i)$ o $\theta \in \xi(i)$.

Construcción de Vardi & Wolper: Funciones de etiquetado

Dado: Alfabeto Σ y una fórmula φ en LTL positivo sobre Σ .

Una función $\xi : \mathbb{N} \rightarrow 2^{\text{cl}(\varphi)}$ es una **función de etiquetado** para φ sobre $w = a_0a_1a_2\cdots \in \Sigma^\omega$ si:

1. Para cada $a \in \Sigma$: Si $a \in \xi(i)$, entonces $a_i = a$, y si $\neg a \in \xi(i)$, entonces $a_i \neq a$.
2. Si $\psi \vee \theta \in \xi(i)$, entonces $\psi \in \xi(i)$ o $\theta \in \xi(i)$.
3. Si $\psi \wedge \theta \in \xi(i)$, entonces $\psi \in \xi(i)$ y $\theta \in \xi(i)$.

Construcción de Vardi & Wolper: Funciones de etiquetado

Dado: Alfabeto Σ y una fórmula φ en LTL positivo sobre Σ .

Una función $\xi : \mathbb{N} \rightarrow 2^{\text{cl}(\varphi)}$ es una **función de etiquetado** para φ sobre $w = a_0a_1a_2\cdots \in \Sigma^\omega$ si:

1. Para cada $a \in \Sigma$: Si $a \in \xi(i)$, entonces $a_i = a$, y si $\neg a \in \xi(i)$, entonces $a_i \neq a$.
2. Si $\psi \vee \theta \in \xi(i)$, entonces $\psi \in \xi(i)$ o $\theta \in \xi(i)$.
3. Si $\psi \wedge \theta \in \xi(i)$, entonces $\psi \in \xi(i)$ y $\theta \in \xi(i)$.
4. Si $\mathbf{X}\psi \in \xi(i)$, entonces $\psi \in \xi(i+1)$.

5. Si $\psi \mathbf{U} \theta \in \xi(i)$, entonces $\theta \in \xi(i)$ o ($\psi \in \xi(i)$ y $\psi \mathbf{U} \theta \in \xi(i+1)$).

5. Si $\psi \mathbf{U} \theta \in \xi(i)$, entonces $\theta \in \xi(i)$ o $(\psi \in \xi(i)$ y $\psi \mathbf{U} \theta \in \xi(i+1))$.
6. Si $\psi \mathbf{R} \theta \in \xi(i)$, entonces $\theta \in \xi(i)$ y $(\psi \in \xi(i)$ o $\psi \mathbf{R} \theta \in \xi(i+1))$.

5. Si $\psi \mathbf{U} \theta \in \xi(i)$, entonces $\theta \in \xi(i)$ o $(\psi \in \xi(i)$ y $\psi \mathbf{U} \theta \in \xi(i+1))$.
6. Si $\psi \mathbf{R} \theta \in \xi(i)$, entonces $\theta \in \xi(i)$ y $(\psi \in \xi(i)$ o $\psi \mathbf{R} \theta \in \xi(i+1))$.
7. Si $\psi \mathbf{U} \theta \in \xi(i)$, entonces existe $j \geq i$ tal que $\theta \in \xi(j)$.

¿Por qué nos interesan las funciones de etiquetado?

- ▶ Pueden ser usadas para verificar si una fórmula es satisfecha en una palabra infinita w .
- ▶ Pueden ser codificadas usando autómatas.

Para seguir con la construcción necesitamos demostrar dos lemas.

Construcción de Vardi & Wolper: Funciones de etiquetado

Dado: Alfabeto Σ , $w \in \Sigma^\omega$ y una fórmula φ en LTL positivo sobre Σ .

Lema

*Si ξ es una función de etiquetado de φ sobre w , entonces para cada $\psi \in cl(\varphi)$ se tiene que **si $\psi \in \xi(i)$, entonces $w^i \models \psi$.***

Lema

*Si $w \models \varphi$, entonces existe una función de etiquetado ξ de φ sobre w tal que **$\varphi \in \xi(0)$.***

Ejercicio: Demuestre los dos lemas.

- Haga esto por inducción en la estructura de ψ en el primer caso, y en forma constructiva en el segundo.

De los dos lemas anteriores podemos deducir que:

Proposición

$w \models \varphi$ si y sólo si *existe una función de etiquetado ξ de φ sobre w tal que $\varphi \in \xi(0)$.*

¿Qué tenemos que hacer para terminar la construcción?

De los dos lemas anteriores podemos deducir que:

Proposición

$w \models \varphi$ si y sólo si *existe una función de etiquetado ξ de φ sobre w tal que $\varphi \in \xi(0)$.*

¿Qué tenemos que hacer para terminar la construcción?

- Definir un autómata de Büchi $\mathcal{A}_\varphi$ que con entrada w tenga como ejecuciones las funciones de etiquetado de φ sobre w .