Determinización: Construcción de Safra

Dado: Autómata de Büchi $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, F)$

- Suponga que $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$.

Vamos a construir un autómata de Rabin determinista $\mathcal{B}$ tal que $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{B})$, donde $\mathcal{B}$ está compuesto por:

- Conjunto de estados Q_1.
- Estado inicial q_0.
- Función de transición $\delta_1 : Q_1 \times \Sigma \to Q_1$.
- Conjunto Δ de pares de aceptación.

Construcción de Safra: Estados

Sea $\{c_1, \ldots, c_{2n}\}$ un conjunto de $2n$ colores.

Cada estado en Q_1 contiene los siguientes elementos:

- Para cada estado $q_i \in Q$, un stack de colores S_i.
- Un orden lineal $<$ en $\{S_1, \ldots, S_n\}$.
- Un par (B, M), donde $B, M \subseteq \{c_1, \ldots, c_{2n}\}$.

Estado inicial q_0:

- Para cada estado $q_i \in Q_0$: $S_i = c_1$. Para cada estado $q_i \in Q \setminus Q_0$: $S_i = \emptyset$.
- $c_1 < \emptyset$.
- $(\emptyset, \emptyset)$.

Dado: Estado $\alpha = (S_1, \ldots, S_n, <_1, (B_1, M_1))$ y un símbolo $a \in \Sigma$.

$\delta_1(\alpha, a) = (T_1, \ldots, T_n, <_2, (B_2, M_2))$ es calculado usando las siguientes reglas:

1. Intuición: Si $q_i \in \delta(q_j, a)$, entonces el stack S_i es reemplazado por S_j. Si para un estado q_i hay varias alternativas, se considera el menor stack según el orden $<_1$.

   Formalmente: Para $i \in [1, n]$, sea $A_i = \{S_j \mid q_i \in \delta(q_j, a)\}$.

   Entonces: T_i es el menor elemento de A_i según $<_1$ (si $A_i = \emptyset$, entonces $T_i = \emptyset$).

Construcción de Safra: Función de transición

2. Para cada estado final $q_i \in F$: Se reemplaza T_i por $T_i d_i$, donde d_i es un color no utilizado.

   Si para $q_i, q_j \in F$ se tiene que el tope de T_i es igual al tope de T_j, entonces $d_i = d_j$.

3. Un color es invisible si no está en el tope de ningún stack.

   Si c es invisible, entonces para cada T_j que contiene a c, se remueve todos los elementos que están sobre c.

Construcción de Safra: Función de transición

Pasos 1 al 3: Son calculados $T_1, \ldots, T_n$.

Los siguientes pasos calculan $<_2$ y (B_2, M_2):

4. Para $T_i \neq T_j$, se tiene que $T_i <_2 T_j$ si alguno de los siguientes casos se cumple:
   - T_i extiende a T_j, vale decir, $T_i = T_j d_1 \cdots d_k$, donde cada d_i es un color.
   - $T_i = PdQ$ y $T_j = PeR$, donde d y e son distintos colores, y se tiene que PdQ' y PeR' eran stacks en α tales que $PdQ' <_1 PeR'$.
   - $T_i = PdQ$ y $T_j = PeR$, donde d y e son distintos colores y e fue agregado en el paso 2.

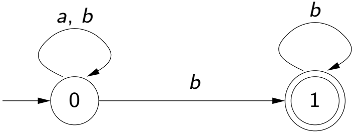
Construcción de Safra: Función de transición

5. B_2 y M_2 son el resultado de aplicar las siguientes reglas:
   - Si un color c deja de ser invisible en el paso 3, entonces $c \in B_2$.
   - Si un color c es eliminado de todos los stacks en el paso 1 ó 3, entonces $c \in M_2$.

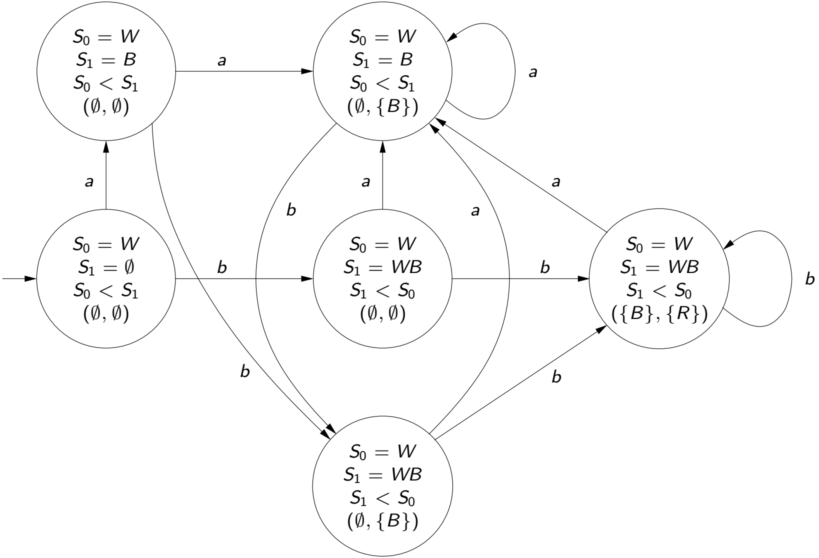
Construcción de Safra: Ejemplo

Antes de ver cuáles son los pares de aceptación, veamos como funciona la construcción en un ejemplo.

Suponga que $\Sigma = \{a, b\}$ para el siguiente autómata de Büchi:



Construcción de Safra: Ejemplo



Construcción de Safra: Pares de aceptación

Este es el paso fundamental para demostrar que la construcción de Safra funciona:

Lema

$\mathcal{A}$ acepta w si y sólo si existe una ejecución ρ de $\mathcal{B}$ sobre w y un color c tales que:

- *Existe estado $(S_1, \ldots, S_n, <, (B, M))$ en Inf(ρ) tal que $c \in B$.*
- *Para ningún estado $(S_1, \ldots, S_n, <, (B, M))$ en Inf(ρ) se tiene que $c \in M$.*

Ejercicio: Demuestre el lema.

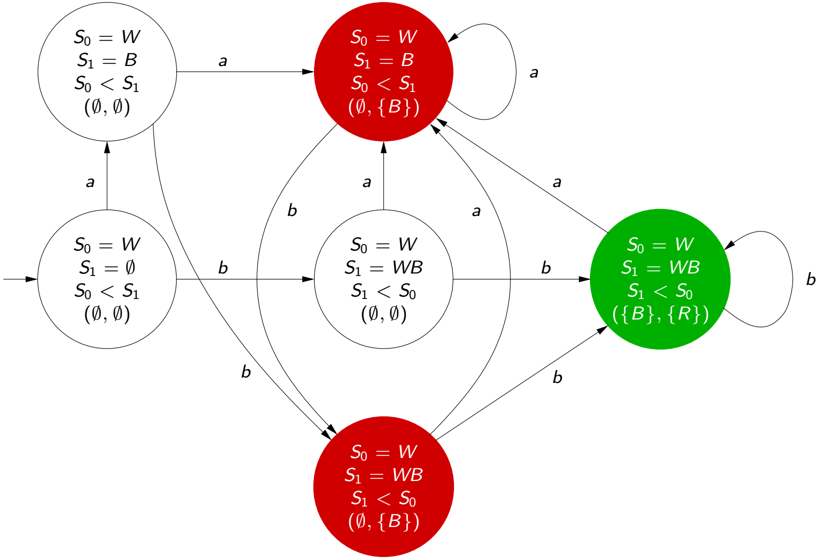
Construcción de Safra: Pares de aceptación

¿Cuáles son entonces los estados finales de $\mathcal{B}$?

$\Delta = \{(V_1, R_1), \ldots, (V_{2n}, R_{2n})\}$, donde:

$$
\begin{aligned}
V_i &= \{(S_1, \ldots, S_n, <, (B, M)) \in Q_1 \mid c_i \in B\}, \\
R_i &= \{(S_1, \ldots, S_n, <, (B, M)) \in Q_1 \mid c_i \in M\}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Para de aceptación para color B



Construcción de Safra: Tamaño

Sólo nos queda estimar el tamaño de $\mathcal{B}$.

- ¿Cuántos estados tiene el autómata $\mathcal{B}$?

Número de estados de $\mathcal{B}$:

- Posibles stacks $\leq (n+1)^{2n}$
- Ordenes para cada combinación de n stacks $\leq n!$
- Pares (B, M) para cada combinación de n stacks $\leq 2^{2n} \cdot 2^{2n}$

Total:

$$\underbrace{(n+1)^{2n} \cdot \ldots \cdot (n+1)^{2n}}_{n \text{ veces}} \cdot n! \cdot 2^{2n} \cdot 2^{2n} \quad = \quad 2^{O(n^2 \log n)}.$$

Construcción de Safra: Tamaño

Mejor estimación: No es necesario almacenar por separado los n stacks; basta con almacenar dos funciones:

- una que indica que color está en el tope de cada stack: $f : \{1, \ldots, n\} \to \{c_1, \ldots, c_{2n}, \perp\}$,
- y una que indica que color está inmediatamente abajo en cada stack: $g : \{c_1, \ldots, c_{2n}\} \to \{c_1, \ldots, c_{2n}, \perp\}$,

¿Por qué basta con estas dos funciones?

Construcción de Safra: Tamaño

Nueva estimación:

$$(2n+1)^n \cdot (2n+1)^{2n} \cdot n! \cdot 2^{2n} \cdot 2^{2n} \quad = \quad 2^{O(n \log n)}.$$

Teorema (Safra)

Para cada autómata de Büchi $\mathcal{A}$ con n estados, se puede construir un autómata de Rabin determinista $\mathcal{B}$ con $2^{O(n \log n)}$ estados tal que $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{B})$.