

Proposición

Los autómatas de Muller son cerrados bajo intersección.

Vamos a ver que esto es una consecuencia de otros resultados.

- ▶ En particular, es una consecuencia de que los autómatas de Büchi son cerrados bajo intersección.

Demostración directa: Muestre que el producto usual de autómatas puede ser utilizado en este caso.

Teorema

Para cada NM $\mathcal{A}$, existe un NB $\mathcal{B}$ tal que $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{B})$.

Demostración: Suponga que $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{F})$, donde $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$ y cada $F_i \subseteq Q$.

Asociamos a cada F_i una función g_i definida de la siguiente forma. Suponga que $<_i$ es un orden para F_i :

Teorema

Para cada NM $\mathcal{A}$, existe un NB $\mathcal{B}$ tal que $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{B})$.

Demostración: Suponga que $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{F})$, donde $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$ y cada $F_i \subseteq Q$.

Asociamos a cada F_i una función g_i definida de la siguiente forma. Suponga que $<_i$ es un orden para F_i :

► g_i sobre F_i es la función sucesor asociada a $<_i$.

Teorema

Para cada NM $\mathcal{A}$, existe un NB $\mathcal{B}$ tal que $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{B})$.

Demostración: Suponga que $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{F})$, donde $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$ y cada $F_i \subseteq Q$.

Asociamos a cada F_i una función g_i definida de la siguiente forma. Suponga que $<_i$ es un orden para F_i :

- ▶ g_i sobre F_i es la función sucesor asociada a $<_i$.
- ▶ Si q_1 y q_2 son el primer y el último elemento de F_i , respectivamente, entonces $g_i(q_2) = \text{listo}$ y $g_i(\text{listo}) = q_1$, donde *listo* es un nuevo estado ($\text{listo} \notin Q$).

Por ejemplo, suponga que $F_1 = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$ y que $<_1$ es el siguiente orden: $q_3 <_1 q_1 <_1 q_5 <_1 q_4 <_1 q_2$. Entonces:

$$g_1(q_3) = q_1$$

$$g_1(q_1) = q_5$$

$$g_1(q_5) = q_4$$

$$g_1(q_4) = q_2$$

$$g_1(q_2) = listo$$

$$g_1(listo) = q_3$$

Büchi vs Muller: Demostración

Definimos $\mathcal{B} = (Q_1, \Sigma, Q_0, \delta_1, F)$ de la siguiente forma:

Büchi vs Muller: Demostración

Definimos $\mathcal{B} = (Q_1, \Sigma, Q_0, \delta_1, F)$ de la siguiente forma:

Conjunto de estados de $\mathcal{B}$:

$$Q_1 = Q \cup (Q \times (Q \cup \{listo\}) \times \{1, \dots, n\}).$$

Büchi vs Muller: Demostración

Definimos $\mathcal{B} = (Q_1, \Sigma, Q_0, \delta_1, F)$ de la siguiente forma:

Conjunto de estados de $\mathcal{B}$:

$$Q_1 = Q \cup (Q \times (Q \cup \{listo\}) \times \{1, \dots, n\}).$$

Función de transición δ_1 :

Büchi vs Muller: Demostración

Definimos $\mathcal{B} = (Q_1, \Sigma, Q_0, \delta_1, F)$ de la siguiente forma:

Conjunto de estados de $\mathcal{B}$:

$$Q_1 = Q \cup (Q \times (Q \cup \{listo\}) \times \{1, \dots, n\}).$$

Función de transición δ_1 :

► Para cada $q \in Q$ y $a \in \Sigma$:

$$\delta_1(q, a) = \delta(q, a) \cup \{(q', listo, i) \mid q' \in \delta(q, a), i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Büchi vs Muller: Demostración

Definimos $\mathcal{B} = (Q_1, \Sigma, Q_0, \delta_1, F)$ de la siguiente forma:

Conjunto de estados de $\mathcal{B}$:

$$Q_1 = Q \cup (Q \times (Q \cup \{listo\}) \times \{1, \dots, n\}).$$

Función de transición δ_1 :

- Para cada $q \in Q$ y $a \in \Sigma$:

$$\delta_1(q, a) = \delta(q, a) \cup \{(q', listo, i) \mid q' \in \delta(q, a), i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

- Para cada $(q_1, q_2, i) \in Q \times Q \times \{1, \dots, n\}$ y $a \in \Sigma$:

$$\begin{aligned} \delta_1((q_1, q_2, i), a) = & \{(q_3, q_4, i) \mid q_3 \in (\delta(q_1, a) \cap F_i), \\ & q_4 = q_2 \text{ si } q_1 \neq q_2 \text{ y } q_4 = g_i(q_2) \text{ si } q_1 = q_2\}. \end{aligned}$$

- Para cada $q \in Q$, $i \in \{1, \dots, n\}$ y $a \in \Sigma$:

$$\delta_1((q, \text{listo}, i), a) = \{(q_1, q_2, i) \mid q_1 \in (\delta(q, a) \cap F_i) \text{ y } q_2 = g_i(\text{listo})\}.$$

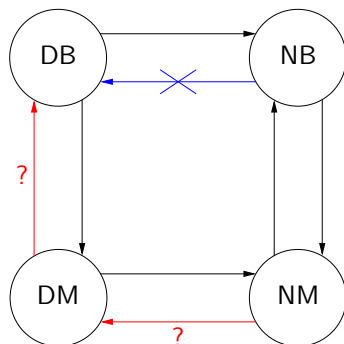
- Para cada $q \in Q$, $i \in \{1, \dots, n\}$ y $a \in \Sigma$:

$$\delta_1((q, \text{listo}, i), a) = \{(q_1, q_2, i) \mid q_1 \in (\delta(q, a) \cap F_i) \text{ y } q_2 = g_i(\text{listo})\}.$$

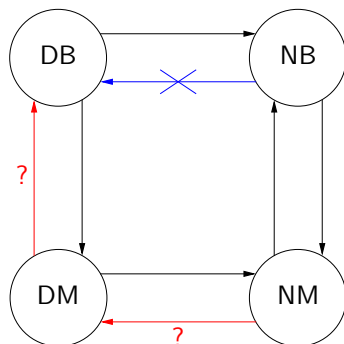
Conjunto F de estados finales:

$$F = \bigcup_{i=1}^n \left(F_i \times \{\text{listo}\} \times \{i\} \right).$$

Lo que sabemos hasta ahora:



Lo que sabemos hasta ahora:



Necesitamos un tercer modelo de autómatas.

Definición

$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \Delta)$ es un autómata de *Rabin no-determinista (NR)* sobre Σ si:

- ▶ Q es un conjunto finito de estados;
- ▶ $Q_0 \subseteq Q$ es un conjunto no vacío de estados iniciales;
- ▶ $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ es una función de transición;
- ▶ $\Delta = \{(V_1, R_1), \dots, (V_n, R_n)\}$, donde $V_i, R_i \subseteq Q$ para cada $i \in [1, n]$.

Si $|Q_0| = 1$ y para cada $(q, a) \in Q \times \Sigma$ se tiene que $|\delta(q, a)| \leq 1$, entonces decimos que $\mathcal{A}$ es determinista (DR).

Autómatas de Rabin: Condición de aceptación

Dado: Autómata de Rabin $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \Delta)$, donde $\Delta = \{(V_1, R_1), \dots, (V_n, R_n)\}$.

Definición

$\mathcal{A}$ acepta una palabra infinita w si existe $i \in [1, n]$ y una ejecución ρ de $\mathcal{A}$ sobre w tal que $\text{Inf}(\rho) \cap V_i \neq \emptyset$ y $\text{Inf}(\rho) \cap R_i = \emptyset$.

Ejercicio: Construya un DR que acepte el lenguaje:

$$\{w \in \{a, b\}^\omega \mid w \text{ tiene un número finito de símbolos } a\}.$$

Teorema

Para cada NB $\mathcal{A}$, existe un NR $\mathcal{B}$ tal que $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{B})$.

Ejercicio: Demuestre el teorema.

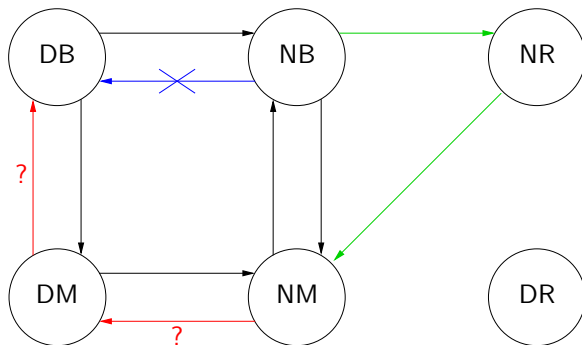
Teorema

Para cada NR $\mathcal{A}$, existe un NM $\mathcal{B}$ tal que $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{B})$.

Ejercicio: Demuestre el teorema.

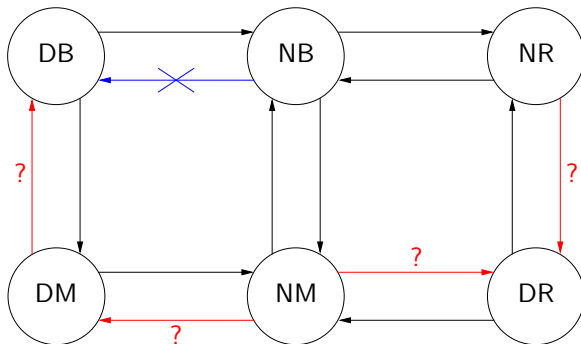
Büchi vs Muller vs Rabin

Lo que acabamos de demostrar:



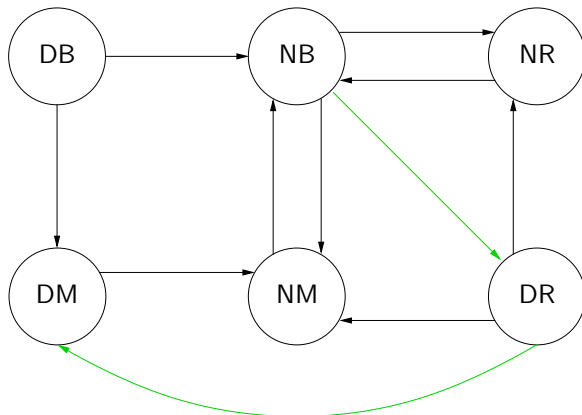
Büchi vs Muller vs Rabin

Lo que sabemos hasta ahora:

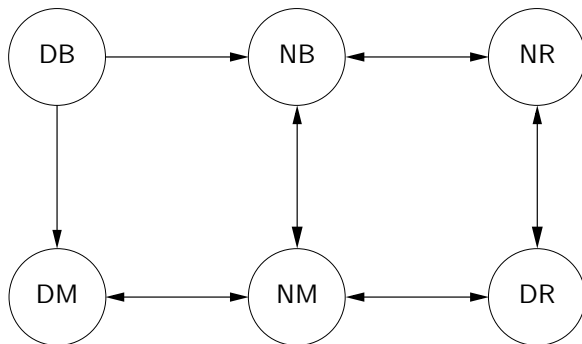


Büchi vs Muller vs Rabin

Lo que vamos a demostrar:



Conclusión:



Determinización de autómatas sobre palabras infinitas

Vamos a demostrar lo siguiente:

Teorema (McNaughton, Safra)

Para cada NB $\mathcal{A}$, existe un DR $\mathcal{B}$ tal que $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{B})$.

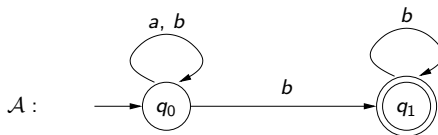
De esto obtenemos como consecuencia que tanto los autómatas de Muller como los de Rabin son determinizable.

Determinización: Un primer intento

Sabemos que la construcción basada en subconjuntos de estados no funciona.

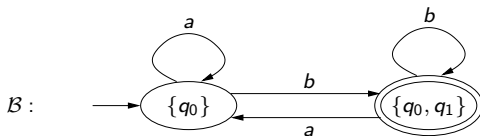
► ¿Por qué sucede esto?

Veamos que anda mal en un ejemplo: Sea $\Sigma = \{a, b\}$ y



Determinización: Un primer intento

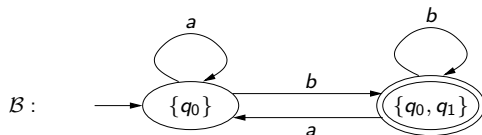
Utilizando la construcción de subconjuntos generamos el siguiente autómata:



Se tiene que: $(ab)^\omega \notin L_\omega(\mathcal{A})$ y $(ab)^\omega \in L_\omega(\mathcal{B})$.

Determinización: Un primer intento

Utilizando la construcción de subconjuntos generamos el siguiente autómata:



Se tiene que: $(ab)^\omega \notin L_\omega(\mathcal{A})$ y $(ab)^\omega \in L_\omega(\mathcal{B})$.

- ¿Qué está haciendo mal el autómata $\mathcal{B}$?

Determinización: Primer intento

		a	b	a	b	a	b	$\dots$
ρ	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0

Determinización: Primer intento

		a	b	a	b	a	b	$\dots$
ρ	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0
ρ_1	:	q_0	q_0	q_1				

Determinización: Primer intento

		a	b	a	b	a	b	$\dots$
ρ	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0
ρ_1	:	q_0	q_0	q_1				
ρ_2	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_1		

Determinización: Primer intento

		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	...
ρ	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0
ρ_1	:	q_0	q_0	q_1				
ρ_2	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_1		
ρ_3	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_1

Determinización: Primer intento

		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	...
ρ	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0
ρ_1	:	q_0	q_0	q_1				
ρ_2	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_1		
ρ_3	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_1
					...			

Determinización: Primer intento

		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	...
ρ	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0
ρ_1	:	q_0	q_0	q_1				
ρ_2	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_1		
ρ_3	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_1
					...			
		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓

Determinización: Primer intento

		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	...
ρ	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0
ρ_1	:	q_0	q_0	q_1				
ρ_2	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_1		
ρ_3	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_1
					...			
		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
		$\{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$

Determinización: Primer intento

		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	...
ρ	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0
ρ_1	:	q_0	q_0	q_1				
ρ_2	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_1		
ρ_3	:	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_1
					...			
		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
		$\{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$

El autómata $\mathcal{B}$ mezcla las posibles ejecuciones.

Determinización: Primer intento

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	...
ρ :	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0
ρ_1 :	q_0	q_0	q_1				
ρ_2 :	q_0	q_0	q_0	q_0	q_1		
ρ_3 :	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_1
				...			
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	$\{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$

El autómata $\mathcal{B}$ mezcla las posibles ejecuciones.

- Vamos a ver como solucionar este problema.

Determinización: Segundo intento

El problema con el intento anterior es que mezcla posibles ejecuciones.

- ▶ Dada una palabra w : Si la ejecución de $\mathcal{B}$ sobre w es aceptada, no podemos asegurar que existe una ejecución de $\mathcal{A}$ sobre w que sea aceptada.
- ▶ Lo único que podemos asegurar: $L_\omega(\mathcal{A}) \subseteq L_\omega(\mathcal{B})$.

Vamos a definir un autómata $\mathcal{B}$ que soluciona el problema anterior.

- ▶ Dada una palabra w : Si la ejecución de $\mathcal{B}$ sobre w es aceptada, **entonces si vamos a poder asegurar que existe una ejecución de $\mathcal{A}$ sobre w que sea aceptada.**

Determinización: Segundo intento

Suponga que $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, F)$.

Definimos $\mathcal{B} = (2^Q \times 2^Q, \Sigma, (Q_0, \emptyset), \delta_1, F_1)$ como se muestra a continuación:

- Dados $Q_1, Q_2 \subseteq Q$ y $a \in \Sigma$, $\delta_1((Q_1, Q_2), a) = (Q_3, Q_4)$:

Determinización: Segundo intento

Suponga que $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, F)$.

Definimos $\mathcal{B} = (2^Q \times 2^Q, \Sigma, (Q_0, \emptyset), \delta_1, F_1)$ como se muestra a continuación:

► Dados $Q_1, Q_2 \subseteq Q$ y $a \in \Sigma$, $\delta_1((Q_1, Q_2), a) = (Q_3, Q_4)$:

Si $Q_1 \neq \emptyset$:

$$Q_3 = \left(\bigcup_{q \in Q_1} \delta(q, a) \right) \setminus Q_4,$$

$$Q_4 = \left(\bigcup_{q \in Q_2} \delta(q, a) \right) \cup \left(F \cap \left(\bigcup_{q \in Q_1} \delta(q, a) \right) \right).$$

Determinización: Segundo intento

Si $Q_1 = \emptyset$:

$$Q_3 = \left(\bigcup_{q \in Q_2} \delta(q, a) \right) \setminus F,$$

$$Q_4 = \left(\bigcup_{q \in Q_2} \delta(q, a) \right) \cap F.$$

Determinización: Segundo intento

Si $Q_1 = \emptyset$:

$$Q_3 = \left(\bigcup_{q \in Q_2} \delta(q, a) \right) \setminus F,$$

$$Q_4 = \left(\bigcup_{q \in Q_2} \delta(q, a) \right) \cap F.$$

► $F_1 = \{(\emptyset, X) \mid \emptyset \subsetneq X \subseteq Q\}.$

Determinización: Segundo intento

Si $Q_1 = \emptyset$:

$$Q_3 = \left(\bigcup_{q \in Q_2} \delta(q, a) \right) \setminus F,$$

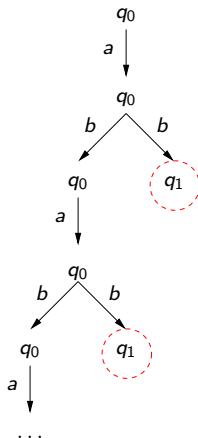
$$Q_4 = \left(\bigcup_{q \in Q_2} \delta(q, a) \right) \cap F.$$

► $F_1 = \{(\emptyset, X) \mid \emptyset \subsetneq X \subseteq Q\}.$

¿Por qué esta construcción soluciona el problema del primer intento?

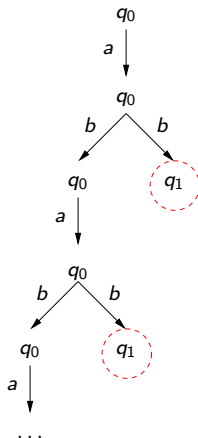
Determinización: Segundo intento

Árbol de ejecución para $(ab)^\omega$ en $\mathcal{A}$:



Determinización: Segundo intento

Árbol de ejecución para $(ab)^\omega$ en $\mathcal{A}$:



La palabra $(ab)^\omega$ no es aceptada ni por $\mathcal{A}$ ni por el nuevo autómata $\mathcal{B}$.

Determinización: Segundo intento

Lema

Para los autómatas recién definidos: $L_\omega(\mathcal{B}) \subseteq L_\omega(\mathcal{A})$.

Para demostrar el lema tenemos que usar el famoso lema de König:

Lema (König)

Si $\mathcal{T}$ es un árbol infinito donde cada nodo tiene un número finito de hijos, entonces $\mathcal{T}$ tiene un camino infinito.

Ejercicio: Demuestre ambos lemas.

Determinización: Segundo intento

¿Tenemos la construcción que buscábamos?

Determinización: Segundo intento

¿Tenemos la construcción que buscábamos?

- ▶ Lamentablemente no: Puede suceder que $L_\omega(\mathcal{B}) \subsetneq L_\omega(\mathcal{A})$.

Determinización: Segundo intento

¿Tenemos la construcción que buscábamos?

- ▶ Lamentablemente no: Puede suceder que $L_\omega(\mathcal{B}) \subsetneq L_\omega(\mathcal{A})$.

Vamos a ver una construcción que funciona correctamente.

Determinización: Segundo intento

¿Tenemos la construcción que buscábamos?

- ▶ Lamentablemente no: Puede suceder que $L_\omega(\mathcal{B}) \subsetneq L_\omega(\mathcal{A})$.

Vamos a ver una construcción que funciona correctamente.

- ▶ Esta construcción es de Safra.

Determinización: Segundo intento

¿Tenemos la construcción que buscábamos?

- ▶ Lamentablemente no: Puede suceder que $L_\omega(\mathcal{B}) \subsetneq L_\omega(\mathcal{A})$.

Vamos a ver una construcción que funciona correctamente.

- ▶ Esta construcción es de Safra.
- ▶ La primera construcción de este tipo es de McNaughton. La que vamos a ver es la más eficiente que existe.