Autómatas sobre palabras infinitas

Marcelo Arenas

Teoría de autómatas sobre palabras infinitas

Los autómatas sobre palabras infinitas son una herramienta fundamental para la verificación formal.

- Una de sus aplicaciones: Algoritmo de verificación para LTL.

En este capítulo vamos a estudiar en detalle estos autómatas.

- Y su conexión con lógicas temporales.

Autómatas sobre palabras infinitas: Formalización

Dado: Alfabeto finito Σ.

Definición

Una palabra infinita w sobre Σ es una secuencia $a_0 a_1 a_2 \cdots$, donde cada $a_i \in \Sigma$ $(i \geq 0)$.

Σ^ω: Conjunto de todas la palabras infinitas sobre Σ.

Autómatas sobre palabras infinitas: Formalización

Definición

$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, F)$ es un autómata de Büchi no-determinista (NB) sobre Σ si:

- *Q es un conjunto finito de estados;*
- *$Q_0 \subseteq Q$ es un conjunto no vacío de estados iniciales;*
- *$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ es una función de transición;*
- *$F \subseteq Q$ es un conjunto de estados finales.*

Si $|Q_0| = 1$ y para cada $(q, a) \in Q \times \Sigma$ se tiene que $|\delta(q, a)| \leq 1$, entonces decimos que $\mathcal{A}$ es determinista (DB).

Autómatas de Büchi: Condición de aceptación

Dado: $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, F)$

Una función $\rho : \mathbb{N} \to Q$ es una ejecución de $\mathcal{A}$ sobre una palabra $w = a_0 a_1 a_2 \cdots$ si

- $\rho(0) \in Q_0$;
- para cada $i \geq 0$: $\rho(i+1) \in \delta(\rho(i), a_i)$.

Concepto fundamental:

$$\mathrm{Inf}(\rho) \quad = \quad \{q \in Q \mid \{i \mid \rho(i) = q\} \text{ es infinito}\}.$$

Autómatas de Büchi: Condición de aceptación

Dado: $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, F)$

Definición

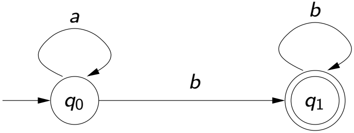
$\mathcal{A}$ acepta una palabra infinita w si existe una ejecución ρ de $\mathcal{A}$ sobre w tal que $\mathit{Inf}(\rho) \cap F \neq \emptyset$.

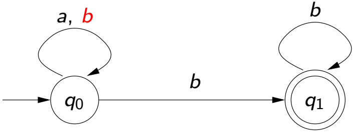
Lenguaje aceptado por un autómata:

$$L_\omega(\mathcal{A}) \quad = \quad \{w \in \Sigma^\omega \mid \mathcal{A} \text{ acepta } w\}.$$

Autómata de Büchi: Ejemplo

¿Qué lenguajes aceptan los siguientes autómatas?





Autómatas de Büchi: Propiedades de clausura

Vamos a determinar si los autómatas de Büchi son cerrados bajo las siguientes operaciones:

- Unión
- Intersección
- Determinización
- Complementación

Estas operaciones son fundamentales para los algoritmos de verificación.

Unión de autómatas de Büchi

Decimos que los autómatas de Büchi son cerrados bajo unión, si para cada par de autómatas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, existe un autómata $\mathcal{C}$ tal que:

$$L_\omega(\mathcal{C}) \quad = \quad L_\omega(\mathcal{A}) \cup L_\omega(\mathcal{B}).$$

Ser cerrado bajo intersección se define de la misma forma.

Teorema

Los autómatas de Büchi son cerrados bajo unión.

Ejercicio: Demuestre el teorema.

Intersección de autómatas de Büchi

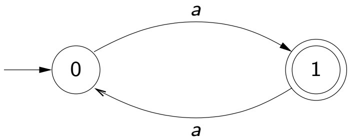
Teorema

Los autómatas de Büchi son cerrados bajo intersección.

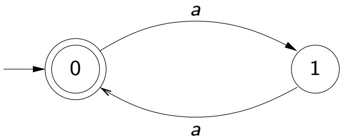
Demostración: Primero vamos a mostrar que el producto de autómatas no puede ser usado directamente para el caso infinito.

Considere los siguientes autómatas de Büchi sobre el alfabeto $\Sigma = \{a\}$:

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:

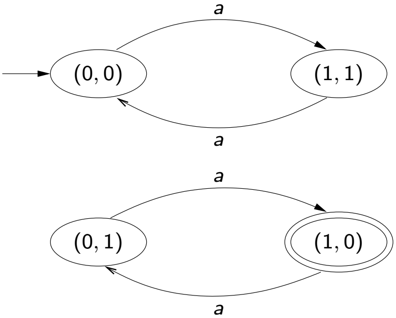


Intersección de autómatas de Büchi

Se tiene que: $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{B}) = \{a^\omega\}$.

Pero:

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$:



Por lo que $L_\omega(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \emptyset \neq L_\omega(\mathcal{A}) \cap L_\omega(\mathcal{B})$.

Intersección de autómatas de Büchi

Veamos como construir un autómata para la intersección:

Suponga que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (Q_1, \Sigma, Q_0^1, \delta_1, F_1), \\ \mathcal{B} &= (Q_2, \Sigma, Q_0^2, \delta_2, F_2). \end{aligned}$$

Definimos:

$$\mathcal{C} = (Q_1 \times Q_2 \times \{1, 2\}, \Sigma, Q_0^1 \times Q_0^2 \times \{1\}, \delta, F)$$

Intersección de autómatas de Büchi

Donde:

- Para $q_1 \in F_1$, $q_2 \in Q_2$ y $a \in \Sigma$:

$$\delta((q_1, q_2, 1), a) \quad = \quad \delta_1(q_1, a) \times \delta_2(q_2, a) \times \{2\}.$$

- Para $q_1 \in Q_1 \setminus F_1$, $q_2 \in Q_2$ y $a \in \Sigma$:

$$\delta((q_1, q_2, 1), a) \quad = \quad \delta_1(q_1, a) \times \delta_2(q_2, a) \times \{1\}.$$

- Para $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in F_2$ y $a \in \Sigma$:

$$\delta((q_1, q_2, 2), a) \quad = \quad \delta_1(q_1, a) \times \delta_2(q_2, a) \times \{1\}.$$

- Para $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2 \setminus F_2$ y $a \in \Sigma$:

$$\delta((q_1, q_2, 2), a) \quad = \quad \delta_1(q_1, a) \times \delta_2(q_2, a) \times \{2\}.$$

- $F = F_1 \times Q_2 \times \{1\}.$

Determinización de autómatas de Büchi

Decimos que un autómata de Büchi $\mathcal{A}$ es determinizable si existe un autómata determinista $\mathcal{B}$ tal que $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{B})$.

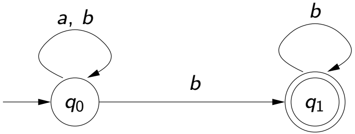
Todos los autómatas sobre palabras finitas son determinizable.

- ¡Esto es falso para el caso infinito!
- Construcción basada en subconjuntos de estados no funciona.

Vamos a construir un NB $\mathcal{A}$ tal que para todo DB $\mathcal{B}$ se tiene que $L_\omega(\mathcal{A}) \neq L_\omega(\mathcal{B})$.

Sea $\Sigma = \{a, b\}$ y:

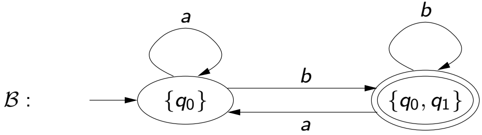
$\mathcal{A}$:



Entonces: $L_\omega(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^\omega \mid w$ tiene un número finito de símbolos $a\}$

Primero vamos a mostrar que la construcción basada en subconjuntos no funciona en este caso.

Utilizando la construcción de subconjuntos generamos el siguiente autómata:



¿Qué lenguaje acepta este autómata?

$\{w \in \Sigma^\omega \mid w$ tiene un número infinito de símbolos $b\}$.

Se tiene que $L_\omega(\mathcal{A}) \neq L_\omega(\mathcal{B})$.

- Nótese que esto no implica que $\mathcal{A}$ no sea determinizable.

Suponga que $\mathcal{A}$ es determinizable: Existe un DB $\mathcal{B}$ tal que $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{B})$.

Suponga que F es el conjunto de estados finales de $\mathcal{B}$.

Como $b^\omega \in L_\omega(\mathcal{A})$, existe $i_0 > 0$ tal que para la única ejecución ρ_0 de $\mathcal{B}$ sobre b^ω: $\rho_0(i_0) \in F$.

Como $b^{i_0}ab^\omega \in L_\omega(\mathcal{A})$, existe $i_1 > 0$ tal que para la única ejecución ρ_1 de $\mathcal{B}$ sobre $b^{i_0}ab^\omega$: $\rho_1(i_0 + 1 + i_1) \in F$.

- Nótese que $\rho_1(i_0) \in F$. ¿Por qué?

Determinización de autómatas de Büchi

En general: Dado $k \geq 1$, existen $i_0, i_1, \ldots, i_k > 0$ tales que para la única ejecución ρ_k de $\mathcal{B}$ sobre $b^{i_0} a b^{i_1} a \cdots b^{i_{k-1}} a b^\omega$:

$$\rho_k(i_0 + 1 + i_1 + 1 + \cdots + i_j) \in F, \qquad \text{para todo } j \in [0, k].$$

Si $k > |F|$, existen $0 \leq p < q \leq k$ tales que

$$\rho_k(i_0 + 1 + i_1 + 1 + \cdots + i_p) = \rho_k(i_0 + 1 + i_1 + 1 + \cdots + i_q).$$

Por lo tanto:

$$b^{i_0} a b^{i_1} a \cdots b^{i_p} (a b^{i_{p+1}} \cdots a b^{i_q})^\omega \in L_\omega(\mathcal{B}).$$

Esta palabra tiene un número infinito de símbolos a: Tenemos una contradicción.

Complementación de autómatas de Büchi

Decimos que un autómata de Büchi $\mathcal{A}$ es complementable si existe un autómata de Büchi $\mathcal{B}$ tal que $L_\omega(\mathcal{B}) = \Sigma^\omega \setminus L_\omega(\mathcal{A})$.

Teorema

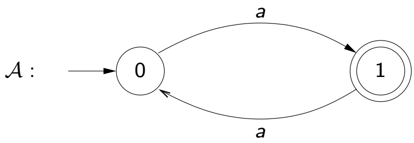
Cada autómata de Büchi es complementable.

¿Cómo podemos demostrar el teorema?

- No podemos usar la técnica usual de complementación porque los autómata de Büchi no son determinizable.

- Ni siquiera para DBs es posible usar la técnica usual de complementación.

  Ejercicio: Suponiendo que $\Sigma = \{a\}$, construya el complemento de



- Este es el problema más difícil que vamos a estudiar en este capítulo.

Para resolver el problema de la complementación vamos a introducir otros dos modelos de autómata sobre palabras infinitas.

Definición

$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{F})$ *es un autómata de Muller no-determinista* (NM) *sobre* Σ *si:*

- Q *es un conjunto finito de estados;*
- $Q_0 \subseteq Q$ *es un conjunto no vacío de estados iniciales;*
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ *es una función de transición;*
- $\mathcal{F} \subseteq 2^Q$ *es una colección de subconjuntos de* Q*.*

Si $|Q_0| = 1$ y para cada $(q, a) \in Q \times \Sigma$ se tiene que $|\delta(q, a)| \leq 1$, entonces decimos que $\mathcal{A}$ es determinista (DM).

Dado: Autómata de Muller $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Q_0, \delta, \mathcal{F})$

Definición

$\mathcal{A}$ acepta una palabra infinita w si existe una ejecución ρ de $\mathcal{A}$ sobre w tal que $\mathit{Inf}(\rho) \in \mathcal{F}$.

Ejercicio: Construya un DM que acepte el lenguaje:

$$\{w \in \{a, b\}^\omega \mid w \text{ tiene un número finito de símbolos } a\}.$$

Autómatas de Muller: Algunas propiedades básicas

Teorema

Para cada NB $\mathcal{A}$, existe un NM $\mathcal{B}$ tal que $L_\omega(\mathcal{A}) = L_\omega(\mathcal{B})$.

Ejercicio: Demuestre el teorema.

Proposición

Para cada DM $\mathcal{A}$, existe un DM $\mathcal{B}$ tal que $L_\omega(\mathcal{B}) = \Sigma^\omega \setminus L_\omega(\mathcal{A})$.

Ejercicio: Demuestre la proposición.