



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERIA  
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

**Teoría de Modelos Finitos - IIC3263**

**Tarea 2**

**Entrega: jueves 7 de mayo**

1. Un grafo  $G = (N, A)$  se dice 3-coloreable si existe una asignación  $f : N \rightarrow \{\text{blanco}, \text{negro}, \text{azul}\}$  tal que para todo arco  $(a, b) \in A$ , se tiene que  $f(a) \neq f(b)$ .

Utilizando la noción de localidad de Hanf, demuestre que 3-colorabilidad no es expresable en lógica de primer orden.

2. En esta pregunta usted va a demostrar que en la noción de localidad de Hanf, isomorfismo no puede ser reemplazado por juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé.

Decimos que  $\mathfrak{A} \equiv_{d,\ell} \mathfrak{B}$  si existe una biyección  $f : A \rightarrow B$  tal que para todo  $c \in A$  se tiene que  $N_d^{\mathfrak{A}}(c) \equiv_{\ell} N_d^{\mathfrak{B}}(f(c))$ . Además, decimos que una consulta Booleana  $Q$  es local según Hanf-Ehrenfeucht-Fraïssé si existen  $d$  y  $\ell$  tales que para todo par de estructuras  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$ , si  $\mathfrak{A} \equiv_{d,\ell} \mathfrak{B}$ , entonces  $Q(\mathfrak{A})$  es verdadero si y sólo si  $Q(\mathfrak{B})$  es verdadero.

Demuestre que existe una oración  $\varphi$  en lógica de primer orden que no es local según Hanf-Ehrenfeucht-Fraïssé.

3. Sea  $\mathcal{L} = \{U_1(\cdot), \dots, U_k(\cdot)\}$  y  $\text{SAT}[\mathcal{L}]$  el siguiente problema de decisión asociado a  $\mathcal{L}$ :

$$\text{SAT}[\mathcal{L}] = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración satisfacible}\}.$$

Usando juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé demuestre que este problema es decidible.

**Hint:** Resuelva el mismo problema para el vocabulario vacío, y después extienda su solución para el caso  $\mathcal{L} = \{U_1(\cdot), \dots, U_k(\cdot)\}$ .

4. Sea  $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$ . Dada una  $\mathcal{L}$ -estructura  $\mathfrak{A} = \langle A, E^{\mathfrak{A}} \rangle$  y un elemento  $a \in A$ , los grados de entrada,  $\text{in-degree}_{\mathfrak{A}}(a)$ , y salida,  $\text{out-degree}_{\mathfrak{A}}(a)$ , de  $a$  en  $\mathfrak{A}$  son definidos como:

$$\begin{aligned} \text{in-degree}_{\mathfrak{A}}(a) &= |\{b \in A \mid (b, a) \in E^{\mathfrak{A}}\}|, \\ \text{out-degree}_{\mathfrak{A}}(a) &= |\{b \in A \mid (a, b) \in E^{\mathfrak{A}}\}|. \end{aligned}$$

Además,  $\text{STRUCT}_1[\mathcal{L}]$  es definido como el conjunto de  $\mathcal{L}$ -estructura  $\mathfrak{A} = \langle A, E^{\mathfrak{A}} \rangle$  tal que para cada  $a \in A$ :  $\text{in-degree}_{\mathfrak{A}}(a) \leq 1$  y  $\text{out-degree}_{\mathfrak{A}}(a) \leq 1$ .

En esta pregunta usted deberá demostrar que el problema de satisfacibilidad es decidible cuando es restringido a la clase de estructuras  $\text{STRUCT}_1[\mathcal{L}]$ . Más precisamente, define  $\text{SAT}_1[\mathcal{L}]$  como el siguiente lenguaje:

$$\text{SAT}_1[\mathcal{L}] = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración para la cual existe } \mathfrak{A} \in \text{STRUCT}_1[\mathcal{L}] \text{ tal que } \mathfrak{A} \models \varphi\}.$$

Usando juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé demuestre que  $\text{SAT}_1[\mathcal{L}]$  es decidible.

**Hint:** Resuelva el mismo problema para la clase de estructuras con grados de entrada y salida 0, y luego para la clase de estructuras con grados de entrada y salida 1, y después extienda su solución para  $\text{STRUCT}_1[\mathcal{L}]$ .