

Un algoritmo para CASI-VAL

Demostramos que CASI-VAL es decidable

- ▶ Pero la demostración no nos da un algoritmo que pueda ser implementado fácilmente

¿Cómo podemos generar un algoritmo más sencillo para CASI-VAL?

- ▶ Vamos a utilizar los axiomas de extensión y una técnica general para demostrar decibilidad de teorías lógicas

Eliminación de cuantificadores

Sea Σ un conjunto de oraciones en LPO sobre un vocabulario $\mathcal{L}$

Definición

Σ admite eliminación de cuantificadores si para cada $\mathcal{L}$ -fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_k)$, existe una $\mathcal{L}$ -fórmula φ^{sc} sin cuantificadores tal que:

$$\Sigma \models \forall x_1 \cdots \forall x_k (\varphi(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow \varphi^{sc}(x_1, \dots, x_k))$$

Nota

Si φ es una oración, entonces φ^{sc} es $\top$ (una tautología) o $\perp$ (una contradicción)

Eliminación de cuantificadores

Ejemplo

Sea $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$ y φ la siguiente fórmula:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \exists y (x_1 \cdot y \cdot y + x_2 \cdot y + x_3 = 0)$$

Sobre $\text{Th}(\mathfrak{R})$, los cuantificadores de φ pueden ser eliminados. Si:

$$\varphi^{\text{sc}}(x_1, x_2, x_3) = \left((x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3) < x_2 \cdot x_2 \right) \vee \left((x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3) = x_2 \cdot x_2 \right),$$

se tiene que:

$$\text{Th}(\mathfrak{R}) \models \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (\varphi(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow \varphi^{\text{sc}}(x_1, x_2, x_3))$$

Eliminación de cuantificadores

Teorema

Si una teoría admite eliminación de cuantificadores, y existe un algoritmo que construye φ^{sc} a partir de φ , entonces es decidible

¿Cómo se demuestra este teorema?

- ▶ ¿Puede mencionar algunas teorías a las cuales se aplica?

Decibilidad de CASI-VAL: Eliminación de cuantificadores

Vamos a usar la técnica de eliminación de cuantificadores para demostrar que CASI-VAL es decidable.

Utilizamos la equivalencia entre CASI-VAL y $\text{Th}(AE)$

- ▶ Vamos a demostrar que AE admite eliminación de cuantificadores

Decibilidad de CASI-VAL: Eliminación de cuantificadores

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

Teorema

AE admite eliminación de cuantificadores. Además, existe un algoritmo que construye $\varphi^{sc}(\bar{x})$ a partir de $\varphi(\bar{x})$.

Demostración: Nuevamente consideramos el lenguaje $\mathcal{L} = \{R(\cdot, \cdot)\}$

La demostración es por inducción en $\varphi(\bar{x})$

- ▶ Si $\varphi(\bar{x})$ es una fórmula atómica, entonces $\varphi^{sc}(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})$
- ▶ Para los conectivos lógicos la propiedad es simple de verificar

Eliminación de cuantificadores para AE : Demostración

- Suponga que $\varphi(\bar{x}) = \exists y \psi(\bar{x}, y)$ y que la propiedad se cumple para $\psi(\bar{x}, y)$.

Existe una fórmula $\psi^{sc}(\bar{x}, y)$ **sin cuantificadores** tal que:

$$AE \models \forall \bar{x} \forall y (\psi(\bar{x}, y) \leftrightarrow \psi^{sc}(\bar{x}, y))$$

Vamos a construir $\varphi^{sc}(\bar{x})$ a partir de $\psi^{sc}(\bar{x}, y)$

Eliminación de cuantificadores para AE : Demostración

Como $\psi^{sc}(\bar{x}, y)$ no tiene cuantificadores, se puede transformar en una fórmula de la forma:

$$\left(\bigvee_{i=1}^k \alpha_i(\bar{x}_i, y) \right) \vee \left(\bigvee_{i=k+1}^{\ell} \alpha_i(\bar{x}_i) \right)$$

donde cada α_i es una conjunción de fórmulas atómicas y negaciones de fórmulas atómicas

- Cada variable en $\bar{x}_i$ es mencionada en $\bar{x}$

Eliminación de cuantificadores para AE : Demostración

Es fácil verificar si cada una de las fórmulas α_i es consistente.

- ▶ ¿Cómo se puede hacer esto?

Si una fórmula α_i no es consistente, entonces es eliminada de la disyunción.

Si todas las fórmulas α_i son eliminadas, entonces:

- ▶ $\varphi^{\text{sc}}(\bar{x}) = \left(\bigwedge_{i=1}^s x_i \neq x_i \right)$ si $\bar{x} = (x_1, \dots, x_s)$ con $s \geq 1$
- ▶ $\varphi^{\text{sc}} = \perp$ si φ es una oración

Eliminación de cuantificadores para AE : Demostración

Suponga entonces que la eliminación fue realizada y quedó la fórmula:

$$\left(\bigvee_{i=1}^m \beta_i(\bar{x}_i, y) \right) \vee \left(\bigvee_{i=m+1}^n \beta_i(\bar{x}_i) \right)$$

Se tiene entonces:

$$AE \models \forall \bar{x} \left[\varphi^{sc}(\bar{x}) \leftrightarrow \left(\left(\bigvee_{i=1}^m \exists y \beta_i(\bar{x}_i, y) \right) \vee \left(\bigvee_{i=m+1}^n \beta_i(\bar{x}_i) \right) \right) \right]$$

Eliminación de cuantificadores para AE : Demostración

Vamos a mostrar que para cada fórmula $\exists y \beta_i(\bar{x}_i, y)$, es posible construir una fórmula $\beta_i^{sc}(\bar{x}_i)$ tal que:

$$AE \models \forall \bar{x}_i (\exists y \beta_i(\bar{x}_i, y) \leftrightarrow \beta_i^{sc}(\bar{x}_i))$$

Primero verificamos si una de las conjunciones en $\beta_i(\bar{x}_i, y)$ es $y = x$ o $x = y$, donde x es una de las variables en $\bar{x}_i$

- Si se cumple la condición: $\beta_i^{sc}(\bar{x}_i) = \beta_i(\bar{x}_i, x)$

Eliminación de cuantificadores para AE : Demostración

Suponga que la condición mencionada antes no se cumple, y que $\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_p)$

Sabemos que:

$$\exists y \beta_i(\bar{x}_i, y) \equiv \left(\bigvee_{j=1}^p \beta_i(\bar{x}_i, x_j) \right) \vee \exists y \left(\bigwedge_{j=1}^p y \neq x_j \wedge \beta_i(\bar{x}_i, y) \right)$$

Por lo tanto, sólo tenemos que eliminar el cuantificador existencial de la fórmula:

$$\exists y \left(\bigwedge_{j=1}^p y \neq x_j \wedge \beta_i(\bar{x}_i, y) \right) \tag{1}$$

Eliminación de cuantificadores para AE : Demostración

En este punto vamos a usar los axiomas de extensión.

La fórmula (1) es equivalente a:

$$\exists y \left[\bigwedge_{j=1}^p y \neq x_j \wedge \beta_i(\bar{x}_i, y) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq q < r \leq p} x_q = x_r \vee x_q \neq x_r \right) \wedge \left(\bigwedge_{\theta \in A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_p, y)} \theta \vee \neg \theta \right) \right] \quad (2)$$

Eliminación de cuantificadores para AE : Demostración

Continuamos el proceso distribuyendo las conjunciones sobre las disyunciones en (2)

- También eliminamos fórmulas inconsistentes

Se obtiene que (1) es equivalente a una disyunción de fórmulas de la forma:

$$\kappa_i(x_1, \dots, x_p) \wedge \xi_i(x_1, \dots, x_p) \wedge \\ \exists y \left(\bigwedge_{j=1}^p y \neq x_j \wedge \rho_i(x_1, \dots, x_p, y) \right)$$

Eliminación de cuantificadores para AE : Demostración

Donde:

- ▶ Existe $F \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_p)$ tal que

$$\kappa_i(x_1, \dots, x_p) \equiv \chi_F(x_1, \dots, x_p)$$

- ▶ $\xi_i(x_1, \dots, x_p)$ es una conjunción de fórmulas de la forma $x_q = x_r$ o $x_q \neq x_r$ ($1 \leq q < r \leq p$)
 - ▶ Para cada $q, r \in \{1, \dots, p\}$ tal que $q < r$, se tiene que $x_q = x_r$ o $x_q \neq x_r$ es mencionado en $\xi_i(x_1, \dots, x_p)$
- ▶ Existe $G \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_p, y)$ que extiende a F y tal que:

$$\rho_i(x_1, \dots, x_p, y) \equiv \chi_G(x_1, \dots, x_p, y)$$

Eliminación de cuantificadores para AE : Demostración

Entonces tenemos que:

$$AE \models \forall x_1 \cdots \forall x_p \left[\left(\kappa_i(x_1, \dots, x_p) \wedge \xi_i(x_1, \dots, x_p) \right) \leftrightarrow \right. \\ \left. \left(\kappa_i(x_1, \dots, x_p) \wedge \xi_i(x_1, \dots, x_p) \wedge \right. \right. \\ \left. \left. \exists y \left(\bigwedge_{j=1}^p y \neq x_j \wedge \rho_i(x_1, \dots, x_p, y) \right) \right) \right]$$

Lo que nos permite eliminar el cuantificador $\exists y$

Eliminación de cuantificadores para AE : Demostración

Un comentario final sobre el último paso:

- ▶ En este paso puede ocurrir que $\kappa_i(x_1, \dots, x_p) \equiv \top$

Esto puede ocurrir cuando eliminamos el cuantificador $\exists y$ desde $\exists y R(y, y)$ ó $\exists y \neg R(y, y)$

- ▶ ¿Cómo se maneja este caso?



Eliminación de cuantificadores para AE : Un ejemplo

Sea $\varphi = \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$

- ▶ Vamos a aplicar la técnica de eliminación de cuantificadores para determinar $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi)$

En la demostración eliminamos cuantificadores existenciales

- ▶ Consideramos entonces la fórmula
 $\neg\varphi = \exists x \exists y (R(x, y) \wedge \neg R(y, x))$

Eliminación de cuantificadores para AE : Un ejemplo

- ▶ Comenzamos con la fórmula $R(x, y) \wedge \neg R(y, x)$ que no tiene cuantificadores.
- ▶ Después consideramos la fórmula:

$$\exists y (R(x, y) \wedge \neg R(y, x)) \quad (3)$$

Esta fórmula es equivalente a:

$$(R(x, x) \wedge \neg R(x, x)) \vee \exists y (x \neq y \wedge R(x, y) \wedge \neg R(y, x))$$

Eliminación de cuantificadores para AE : Un ejemplo

Pero: $R(x, x) \wedge \neg R(x, x)$ es inconsistente

Concluimos que (3) es equivalente a:

$$\exists y (x \neq y \wedge R(x, y) \wedge \neg R(y, x)) \quad (4)$$

Eliminación de cuantificadores para AE : Un ejemplo

- Tenemos que eliminar el cuantificador existencial de la fórmula (4)

Sabemos que esta fórmula es equivalente a:

$$\exists y \left[x \neq y \wedge R(x, y) \wedge \neg R(y, x) \wedge \right. \\ \left. \left(R(x, x) \vee \neg R(x, x) \right) \wedge \left(R(x, y) \vee \neg R(x, y) \right) \wedge \right. \\ \left. \left(R(y, x) \vee \neg R(y, x) \right) \wedge \left(R(y, y) \vee \neg R(y, y) \right) \right]$$

Eliminación de cuantificadores para AE : Un ejemplo

Vale decir, (4) es equivalente a:

$$\begin{aligned} & \left(R(x, x) \wedge \exists y (x \neq y \wedge R(x, y) \wedge \neg R(y, x) \wedge R(y, y)) \right) \vee \\ & \left(R(x, x) \wedge \exists y (x \neq y \wedge R(x, y) \wedge \neg R(y, x) \wedge \neg R(y, y)) \right) \vee \\ & \left(\neg R(x, x) \wedge \exists y (x \neq y \wedge R(x, y) \wedge \neg R(y, x) \wedge R(y, y)) \right) \vee \\ & \left(\neg R(x, x) \wedge \exists y (x \neq y \wedge R(x, y) \wedge \neg R(y, x) \wedge \neg R(y, y)) \right) \quad (5) \end{aligned}$$

Eliminación de cuantificadores para AE : Un ejemplo

- ▶ Ahora tenemos que eliminar los cuantificadores existenciales de la fórmula (5)

Para esto utilizamos las siguientes equivalencias:

$$AE \models \forall x \left[R(x,x) \leftrightarrow \left(R(x,x) \wedge \right. \right. \\ \left. \left. \exists y (x \neq y \wedge R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge R(y,y)) \right) \right]$$
$$AE \models \forall x \left[R(x,x) \leftrightarrow \left(R(x,x) \wedge \right. \right. \\ \left. \left. \exists y (x \neq y \wedge R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge \neg R(y,y)) \right) \right]$$

Eliminación de cuantificadores para AE : Un ejemplo

$$AE \models \forall x \left[\neg R(x,x) \leftrightarrow \left(\neg R(x,x) \wedge \right. \right. \\ \left. \left. \exists y (x \neq y \wedge R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge R(y,y)) \right) \right]$$
$$AE \models \forall x \left[\neg R(x,x) \leftrightarrow \left(\neg R(x,x) \wedge \right. \right. \\ \left. \left. \exists y (x \neq y \wedge R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge \neg R(y,y)) \right) \right]$$

Eliminación de cuantificadores para AE : Un ejemplo

Concluimos que:

$$AE \models \forall x \left[\left(\exists y (R(x, y) \wedge \neg R(y, x)) \right) \leftrightarrow \left(R(x, x) \vee \neg R(x, x) \right) \right]$$

- Finalmente, tenemos que eliminar el cuantificador existencial de la fórmula $\exists x (R(x, x) \vee \neg R(x, x))$

Eliminación de cuantificadores para AE : Un ejemplo

- Distribuyendo obtenemos:

$$\exists x R(x, x) \vee \exists x \neg R(x, x)$$

Como ambas fórmulas son ciertas de acuerdo a los axiomas de extensión, concluimos que:

$$AE \models \left[\left(\exists x \exists y (R(x, y) \wedge \neg R(y, x)) \right) \leftrightarrow \top \right]$$

De todo el proceso concluimos que $\mu_{\mathcal{L}}(\neg\varphi) = 1$, vale decir,
 $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 0$