

Ley 0-1 para LPO: Demostración

Vamos a demostrar que la LPO tiene la ley 0-1

- ▶ Para cada vocabulario que sólo contiene relaciones

Suponemos que $\mathcal{L} = \{R(\cdot, \cdot)\}$

- ▶ El caso general se demuestra de la misma forma

Pieza fundamental: **Axiomas de extensión**

- ▶ Está es la demostración dada por Fagin

Axiomas de extensión: Definición

Dado: Variables $x_1, \dots, x_n$ ($n \geq 0$)

- ▶ $A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_n)$: Conjunto de todas las fórmulas atómicas de la forma $R(u, v)$, donde $\{u, v\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$
- ▶ Para cada $F \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_n)$, definimos $\chi_F(x_1, \dots, x_n)$ como:

$$\left(\bigwedge_{\varphi \in F} \varphi \right) \wedge \left(\bigwedge_{\psi \in (A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_n) \setminus F)} \neg \psi \right)$$

Axiomas de extensión: Definición

Dado: Variable z tal que $z \neq x_i$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$

- ▶ Dado $F \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_n)$ y $G \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_n, z)$, decimos que **G extiende a F** si $F = G \cap A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_n)$

Nota: Si $n = 0$, entonces $A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_n) = \emptyset$

Axiomas de extensión: Definición

Definición (Axioma de extensión)

Dado $F \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_n)$ y $G \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_n, z)$ tal que G extiende a F , definimos $AE_{F,G}$ como:

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \left(\left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \wedge \chi_F(x_1, \dots, x_n) \right) \rightarrow \right. \\ \left. \exists z \left(\bigwedge_{i=1}^n z \neq x_i \wedge \chi_G(x_1, \dots, x_n, z) \right) \right)$$

Axiomas de extensión: Definición

Definición (Axioma de extensión)

Dado $F \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_n)$ y $G \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_n, z)$ tal que G extiende a F , definimos $AE_{F,G}$ como:

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \left(\left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \wedge \chi_F(x_1, \dots, x_n) \right) \rightarrow \right. \\ \left. \exists z \left(\bigwedge_{i=1}^n z \neq x_i \wedge \chi_G(x_1, \dots, x_n, z) \right) \right)$$

Si $n = 0$, entonces obtenemos el axioma de extensión $\exists z \chi_G(z)$

► Tenemos dos posibilidades: $\exists z R(z, z)$ ó $\exists z \neg R(z, z)$

Axiomas de extensión: Probabilidad asintótica

Lema

$$\mu_{\mathcal{L}}(\neg AE_{F,G}) = 0$$

Demostración: $\neg AE_{F,G}$ es equivalente a la siguiente oración:

$$\exists x_1 \cdots \exists x_k \left(\left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} x_i \neq x_j \wedge \chi_F(x_1, \dots, x_k) \right) \wedge \right. \\ \left. \forall z \left(\bigwedge_{i=1}^k z \neq x_i \rightarrow \neg \chi_G(x_1, \dots, x_k, z) \right) \right)$$

Axiomas de extensión: Probabilidad asintótica

Sea $n \geq k + 1$ y $a_1, \dots, a_k$ puntos en el intervalo $\{1, \dots, n\}$

De las 2^{n^2} $\mathcal{L}$ -estructuras con dominio $\{1, \dots, n\}$:

- ▶ $\frac{1}{2^{k^2}}$ es la fracción de estructuras que satisfacen $\chi_F(a_1, \dots, a_k)$
- ▶ $\frac{1}{2^{k^2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{2k+1}}\right)$ es la fracción de estructuras que satisfacen $\chi_F(a_1, \dots, a_k) \wedge \neg \chi_G(a_1, \dots, a_k, b)$, para un b distinto de cada a_i

Axiomas de extensión: Probabilidad asintótica

► $\frac{1}{2^{k^2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{2k+1}}\right)^{n-k}$ es la fracción de estructuras que satisfacen:

$$\chi_F(a_1, \dots, a_k) \wedge \forall z \left(\bigwedge_{i=1}^k z \neq x_i \rightarrow \neg \chi_G(a_1, \dots, a_k, z) \right)$$

Concluimos que:

$$\mu_{\mathcal{L}}^n(\neg AE_{F,G}) \leq n \cdot (n-1) \dots$$

$$(n-k+1) \cdot \frac{1}{2^{k^2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{2k+1}}\right)^{n-k}$$

Axiomas de extensión: Probabilidad asintótica

Por lo tanto:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{L}}^n(\neg AE_{F,G}) \leq \frac{\frac{1}{2^{k^2}}}{\left(1 - \frac{1}{2^{2k+1}}\right)^k} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{2k+1}}\right)^n \right)$$

Como k es una constante y $\left(1 - \frac{1}{2^{2k+1}}\right) < 1$, tenemos que:

$$\mu_{\mathcal{L}}(\neg AE_{F,G}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{L}}^n(\neg AE_{F,G}) = 0$$



Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Sea AE_k ($k \geq 1$) el siguiente conjunto de oraciones en LPO:

$$\left\{ AE_{F,G} \mid \text{existe } i \in [0, k-1] \text{ tal que } F \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_i), \right. \\ \left. G \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_i, z) \text{ y } G \text{ extiende a } F \right\}$$

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Sea AE_k ($k \geq 1$) el siguiente conjunto de oraciones en LPO:

$$\left\{ AE_{F,G} \mid \text{existe } i \in [0, k-1] \text{ tal que } F \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_i), \right. \\ \left. G \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_i, z) \text{ y } G \text{ extiende a } F \right\}$$

Corolario

Para cada $k \geq 1$, se tiene que $\mu_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_k) = 1$

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Sea AE_k ($k \geq 1$) el siguiente conjunto de oraciones en LPO:

$$\left\{ AE_{F,G} \mid \text{existe } i \in [0, k-1] \text{ tal que } F \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_i), \right. \\ \left. G \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_i, z) \text{ y } G \text{ extiende a } F \right\}$$

Corolario

Para cada $k \geq 1$, se tiene que $\mu_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_k) = 1$

Demostración: El corolario es una consecuencia del lema anterior y de los dos siguientes lemas.

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Dado: $\mathcal{L}$ -propiedades $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$

Lema

Si $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1)$, $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_2)$ y $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$ están definidos, entonces:

$$\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) = \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1) + \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_2) - \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$$

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Dado: $\mathcal{L}$ -propiedades $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$

Lema

Si $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1)$, $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_2)$ y $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$ están definidos, entonces:

$$\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) = \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1) + \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_2) - \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$$

Demostración: Para cada $\mathcal{L}$ -propiedad $\mathcal{P}$, sea:

$$\mathcal{P}^n = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{P} \mid \text{el dominio de } \mathfrak{A} \text{ es } \{1, \dots, n\}\}$$

Tenemos que: $s_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{P}) = |\mathcal{P}^n|$

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Sea $n \geq 1$. Dado que:

$$(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)^n = \mathcal{P}_1^n \cap \mathcal{P}_2^n$$

$$(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)^n = \mathcal{P}_1^n \cup \mathcal{P}_2^n$$

$$|\mathcal{P}_1^n \cup \mathcal{P}_2^n| = |\mathcal{P}_1^n| + |\mathcal{P}_2^n| - |\mathcal{P}_1^n \cap \mathcal{P}_2^n|$$

Tenemos que:

$$|(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)^n| = |\mathcal{P}_1^n| + |\mathcal{P}_2^n| - |(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)^n|$$

Por lo tanto:

$$\frac{|(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)^n|}{2^{n^2}} = \frac{|\mathcal{P}_1^n|}{2^{n^2}} + \frac{|\mathcal{P}_2^n|}{2^{n^2}} - \frac{|(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)^n|}{2^{n^2}}$$

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Concluimos que:

$$\mu_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) = \mu_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{P}_1) + \mu_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{P}_2) - \mu_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$$

Así, dado que $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1)$, $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_2)$ y $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$ están definidos, concluimos que:

$$\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) = \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1) + \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_2) - \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$$



Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Lema

Si $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1) = 1$ y $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_2) = 1$, entonces:

$$\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) = 1$$

Demostración: Dado que $\mathcal{P}_1 \subseteq (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$, tenemos que

$$1 = \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1) \leq \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq 1$$

Por lo tanto, por lema anterior:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) &= \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1) + \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_2) - \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \\ &= 1 + 1 - 1 \\ &= 1\end{aligned}$$



Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Concluimos que para cada $k \geq 1$:

- ▶ AE_k es un conjunto satisfacible de fórmulas

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Concluimos que para cada $k \geq 1$:

- ▶ AE_k es un conjunto satisfacible de fórmulas

¿Puede dar un modelo de AE_k ?

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Concluimos que para cada $k \geq 1$:

- ▶ AE_k es un conjunto satisfacible de fórmulas

¿Puede dar un modelo de AE_k ?

- ▶ En este caso no es difícil demostrar que existe un modelo, pero sí lo es construirlo

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Concluimos que para cada $k \geq 1$:

- ▶ AE_k es un conjunto satisfacible de fórmulas

¿Puede dar un modelo de AE_k ?

- ▶ En este caso no es difícil demostrar que existe un modelo, pero sí lo es construirlo

Esta es la esencia del **método probabilista**

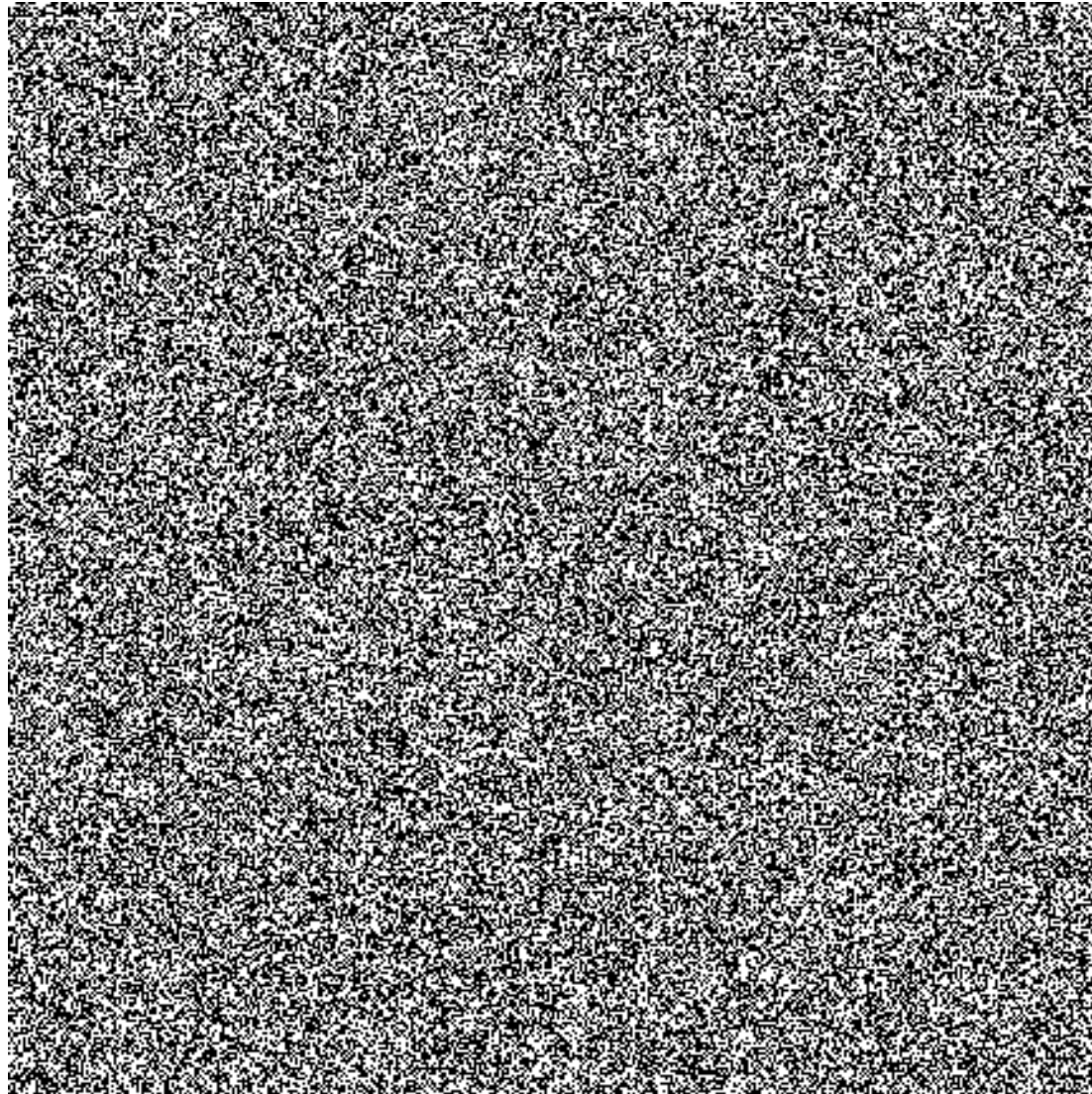
Paréntesis: Un modelo para AE_2

La matriz de adyacencia para una estructura que satisface AE_2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Este es el modelo de AE_2 con menor número de nodos

La matriz de adyacencia para una estructura que satisface AE_3



Este modelo tiene 343 nodos (gracias a Martín Ugarte por ambos modelos)

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Sea AE el conjunto de todos los axiomas de extensión.

- ▶ Para estudiar AE también tenemos que considerar modelos infinitos

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Sea AE el conjunto de todos los axiomas de extensión.

- ▶ Para estudiar AE también tenemos que considerar modelos infinitos

Proposición

AE es satisfacible. Además, cada modelo de AE es infinito

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Sea AE el conjunto de todos los axiomas de extensión.

- ▶ Para estudiar AE también tenemos que considerar modelos infinitos

Proposición

AE es satisfacible. Además, cada modelo de AE es infinito

Demostración: Usando compacidad y los corolarios anteriores.

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Lema

Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ satisfacen AE_k , entonces $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Lema

Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ satisfacen AE_k , entonces $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$

Ejercicio

Demuestre el lema

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Lema

Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ satisfacen AE_k , entonces $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$

Ejercicio

Demuestre el lema

Corolario

Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son modelos de AE y φ es una $\mathcal{L}$ -oración en LPO , entonces $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi$

Ley 0-1 para LPO: Demostración

Finalmente tenemos todos los ingredientes para demostrar que LPO tiene la ley 0-1 para $\mathcal{L}$.

Ley 0-1 para LPO: Demostración

Finalmente tenemos todos los ingredientes para demostrar que LPO tiene la ley 0-1 para $\mathcal{L}$.

Sea Φ una oración en LPO.

- ▶ Suponga que $k = rc(\Phi)$

Ley 0-1 para LPO: Demostración

Finalmente tenemos todos los ingredientes para demostrar que LPO tiene la ley 0-1 para $\mathcal{L}$.

Sea Φ una oración en LPO.

- ▶ Suponga que $k = rc(\Phi)$

Vamos a demostrar que $\mu_{\mathcal{L}}(\Phi) = 0$ ó $\mu_{\mathcal{L}}(\Phi) = 1$

- ▶ Consideramos dos casos

Ley 0-1 para LPO: Demostración

1. Existe $\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ tal que $\mathfrak{A} \models AE_k$ y $\mathfrak{A} \models \Phi$

Sea $\mathfrak{B} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ tal que $\mathfrak{B} \models AE_k$

Por resultados anteriores: $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en todas las oraciones con rango de cuantificación k

► Entonces: $\mathfrak{B} \models \Phi$

Concluimos que $AE_k \models \Phi$, por lo que para todo $n \geq 1$:

$$s_{\mathcal{L}}^n(\bigwedge AE_k) \leq s_{\mathcal{L}}^n(\Phi)$$

De esto y los resultados anteriores concluimos que:

$$1 = \mu_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_k) \leq \mu_{\mathcal{L}}(\Phi) \leq 1$$

Ley 0-1 para LPO: Demostración

2. No existe $\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ tal que $\mathfrak{A} \models AE_k$ y $\mathfrak{A} \models \Phi$

Entonces existe $\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ tal que $\mathfrak{A} \models AE_k$ y $\mathfrak{A} \models \neg\Phi$

Por caso anterior: $\mu_{\mathcal{L}}(\neg\Phi) = 1$

Por lo tanto: $\mu_{\mathcal{L}}(\Phi) = 0$



Una aplicación: Casi todos los grafos no son 3-coloreables

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$

Queremos demostrar que casi todos los grafos (o $\mathcal{L}$ -estructuras) no son 3-coloreables

Una aplicación: Casi todos los grafos no son 3-coloreables

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$

Queremos demostrar que casi todos los grafos (o $\mathcal{L}$ -estructuras) no son 3-coloreables

Vamos a demostrar algo más fuerte: **Casi todos los grafos contienen un clique con 4 nodos (K_4)**

- ▶ De esto se concluye que no son 3-coloreables

Una aplicación: Casi todos los grafos no son 3-coloreables

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$

Queremos demostrar que casi todos los grafos (o $\mathcal{L}$ -estructuras) no son 3-coloreables

Vamos a demostrar algo más fuerte: **Casi todos los grafos contienen un clique con 4 nodos (K_4)**

► De esto se concluye que no son 3-coloreables

Sea:

$$\varphi = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \bigwedge_{1 \leq i < j \leq 4} \left(x_i \neq x_j \wedge E(x_i, x_j) \wedge E(x_j, x_i) \right)$$

Vamos a demostrar que $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$

Una aplicación: Casi todos los grafos contienen K_4

Considere las siguientes $\mathcal{L}$ -fórmulas:

$$\alpha_1(x_1) = \neg E(x_1, x_1)$$

$$\alpha_2(x_1, x_2) = \alpha_1(x_1) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_1) \wedge \neg E(x_2, x_2)$$

$$\alpha_3(x_1, x_2, x_3) = \alpha_2(x_1, x_2) \wedge E(x_1, x_3) \wedge E(x_3, x_1) \wedge \\ E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_2) \wedge \neg E(x_3, x_3)$$

$$\alpha_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_3(x_1, x_2, x_3) \wedge E(x_1, x_4) \wedge E(x_4, x_1) \wedge \\ E(x_2, x_4) \wedge E(x_4, x_2) \wedge E(x_3, x_4) \wedge E(x_4, x_3) \wedge \neg E(x_4, x_4)$$

Una aplicación: Casi todos los grafos contienen K_4

Las siguientes $\mathcal{L}$ -oraciones son elementos de AE_4 :

$$\exists z \alpha_1(z)$$

$$\forall x_1 [\alpha_1(x_1) \rightarrow \exists z (z \neq x_1 \wedge \alpha_2(x_1, z))]$$

$$\forall x_1 \forall x_2 [(x_1 \neq x_2 \wedge \alpha_2(x_1, x_2)) \rightarrow \exists z (z \neq x_1 \wedge z \neq x_2 \wedge \alpha_3(x_1, x_2, z))]$$

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 [(x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \alpha_3(x_1, x_2, x_3)) \rightarrow \\ \exists z (z \neq x_1 \wedge z \neq x_2 \wedge z \neq x_3 \wedge \alpha_4(x_1, x_2, x_3, z))]$$

Una aplicación: Casi todos los grafos contienen K_4

Las siguientes $\mathcal{L}$ -oraciones son elementos de AE_4 :

$$\exists z \alpha_1(z)$$

$$\forall x_1 [\alpha_1(x_1) \rightarrow \exists z (z \neq x_1 \wedge \alpha_2(x_1, z))]$$

$$\forall x_1 \forall x_2 [(x_1 \neq x_2 \wedge \alpha_2(x_1, x_2)) \rightarrow \exists z (z \neq x_1 \wedge z \neq x_2 \wedge \alpha_3(x_1, x_2, z))]$$

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 [(x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \alpha_3(x_1, x_2, x_3)) \rightarrow \\ \exists z (z \neq x_1 \wedge z \neq x_2 \wedge z \neq x_3 \wedge \alpha_4(x_1, x_2, x_3, z))]$$

Concluimos que si $\mathfrak{A} \models AE_4$, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi$

► Tenemos que $AE_4 \models \varphi$

Una aplicación: Casi todos los grafos contienen K_4

Las siguientes $\mathcal{L}$ -oraciones son elementos de AE_4 :

$$\begin{aligned} & \exists z \alpha_1(z) \\ & \forall x_1 [\alpha_1(x_1) \rightarrow \exists z (z \neq x_1 \wedge \alpha_2(x_1, z))] \\ & \forall x_1 \forall x_2 [(x_1 \neq x_2 \wedge \alpha_2(x_1, x_2)) \rightarrow \exists z (z \neq x_1 \wedge z \neq x_2 \wedge \alpha_3(x_1, x_2, z))] \\ & \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 [(x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \alpha_3(x_1, x_2, x_3)) \rightarrow \\ & \quad \exists z (z \neq x_1 \wedge z \neq x_2 \wedge z \neq x_3 \wedge \alpha_4(x_1, x_2, x_3, z))] \end{aligned}$$

Concluimos que si $\mathfrak{A} \models AE_4$, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi$

► Tenemos que $AE_4 \models \varphi$

Por lo tanto $1 = \mu_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_4) \leq \mu_{\mathcal{L}}(\varphi) \leq 1$

► Así, tenemos que $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$

Ley 0-1 para otras lógicas

Existen lógicas que no tienen la ley 0-1.

- ▶ ¿Puede dar algún ejemplo?

¿Existen otras lógicas que satisfagan la ley 0-1?

Ley 0-1 para otras lógicas

Existen lógicas que no tienen la ley 0-1.

- ¿Puede dar algún ejemplo?

¿Existen otras lógicas que satisfagan la ley 0-1?

Teorema

Si $\mathcal{L}$ es un vocabulario que sólo contiene relaciones, entonces $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ tiene la ley 0-1 para $\mathcal{L}$

Axiomas de extensión y la lógica $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$

Lema

Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ satisfacen AE_k , entonces $\mathfrak{A} \equiv_k^{\infty\omega} \mathfrak{B}$

Axiomas de extensión y la lógica $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$

Lema

Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ satisfacen AE_k , entonces $\mathfrak{A} \equiv_k^{\infty\omega} \mathfrak{B}$

Ejercicio

Demuestre el lema

Axiomas de extensión y la lógica $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$

Lema

Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ satisfacen AE_k , entonces $\mathfrak{A} \equiv_k^{\infty\omega} \mathfrak{B}$

Ejercicio

Demuestre el lema

Corolario

Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son modelos de AE y φ es una $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ -oración, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi$

Ley 0-1 para $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$: Demostración

Sabemos que $\mu_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_k) = 1$

- ▶ Este resultado es fundamental para la demostración de que $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ tiene la ley 0-1

Ley 0-1 para $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$: Demostración

Sabemos que $\mu_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_k) = 1$

- ▶ Este resultado es fundamental para la demostración de que $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ tiene la ley 0-1

Sea Φ una oración en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$.

- ▶ Entonces existe k tal que Φ es una oración en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^k$

Ley 0-1 para $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$: Demostración

Sabemos que $\mu_{\mathcal{L}}(\bigwedge A E_k) = 1$

- ▶ Este resultado es fundamental para la demostración de que $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ tiene la ley 0-1

Sea Φ una oración en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$.

- ▶ Entonces existe k tal que Φ es una oración en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^k$

Vamos a demostrar que $\mu_{\mathcal{L}}(\Phi) = 0$ ó $\mu_{\mathcal{L}}(\Phi) = 1$

- ▶ Al igual que para LPO, tenemos que considerar dos casos

Ley 0-1 para $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$: Demostración

1. Existe $\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ tal que $\mathfrak{A} \models AE_k$ y $\mathfrak{A} \models \Phi$

Sea $\mathfrak{B} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ tal que $\mathfrak{B} \models AE_k$

Por los resultados anteriores: $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en todas las oraciones de $\mathcal{L}_{\infty\omega}^k$.

► Entonces: $\mathfrak{B} \models \Phi$

Concluimos que $AE_k \models \Phi$, por lo que para todo $n \geq 1$:
 $s_{\mathcal{L}}^n(\bigwedge AE_k) \leq s_{\mathcal{L}}^n(\Phi)$

De esto y los resultados anteriores concluimos que:

$$1 = \mu_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_k) \leq \mu_{\mathcal{L}}(\Phi) \leq 1$$

Ley 0-1 para $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$: Demostración

2. No existe $\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ tal que $\mathfrak{A} \models AE_k$ y $\mathfrak{A} \models \Phi$

Entonces existe $\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ tal que $\mathfrak{A} \models AE_k$ y $\mathfrak{A} \models \neg\Phi$

Por caso anterior: $\mu_{\mathcal{L}}(\neg\Phi) = 1$

Por lo tanto: $\mu_{\mathcal{L}}(\Phi) = 0$



La ley 0-1 para $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$: Primer corolario

Existen propiedades de grafos que no pueden ser expresadas en LPO pero si en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$.

La ley 0-1 para $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$: Primer corolario

Existen propiedades de grafos que no pueden ser expresadas en LPO pero si en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$.

Ejemplo

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$ y CONEXO el siguiente lenguaje:

$$\{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ representa un grafo conexo}\}$$

CONEXO es expresable en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^3$ como:

$$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \neq x_2 \rightarrow \bigvee_{i \geq 1} \theta_i(x_1, x_2))$$

donde $\theta_1(x_1, x_2) = (E(x_1, x_2) \vee E(x_2, x_1))$ y:

La ley 0-1 para $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$: Primer corolario

Ejemplo (continuación)

$$\theta_{n+1}(x_1, x_2) = \exists x_3 ((E(x_1, x_3) \vee E(x_3, x_1)) \wedge \\ \exists x_1 (x_1 = x_3 \wedge \theta_n(x_1, x_2)))$$

La ley 0-1 para $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$: Primer corolario

Ejemplo (continuación)

$$\theta_{n+1}(x_1, x_2) = \exists x_3 ((E(x_1, x_3) \vee E(x_3, x_1)) \wedge \exists x_1 (x_1 = x_3 \wedge \theta_n(x_1, x_2)))$$

Entonces: $\mu_{\mathcal{L}}(\text{CONEXO}) = 0$ ó $\mu_{\mathcal{L}}(\text{CONEXO}) = 1$

La ley 0-1 para $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$: Primer corolario

Ejemplo (continuación)

$$\theta_{n+1}(x_1, x_2) = \exists x_3 ((E(x_1, x_3) \vee E(x_3, x_1)) \wedge \exists x_1 (x_1 = x_3 \wedge \theta_n(x_1, x_2)))$$

Entonces: $\mu_{\mathcal{L}}(\text{CONEXO}) = 0$ ó $\mu_{\mathcal{L}}(\text{CONEXO}) = 1$

Casi todos los grafos son conexos, o casi todos no lo son

► ¿Cuál de las dos alternativas es la correcta?

La ley 0-1 para $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$: Primer corolario

Ejemplo (continuación)

Suponga que $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$ -estructura tal que $\mathfrak{A} \models AE_3$

Dados elementos distintos a y b en $\mathfrak{A}$, existe $F \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, x_2)$ tal que $\mathfrak{A} \models \chi_F(a, b)$

Entonces, dado que el siguiente es un axioma en AE_3 :

$$\forall x_1 \forall x_2 [(x_1 \neq x_2 \wedge \chi_F(x_1, x_2)) \rightarrow \exists z (z \neq x_1 \wedge z \neq x_2 \wedge \chi_F(x_1, x_2) \wedge \\ E(x_1, z) \wedge E(z, x_1) \wedge E(x_2, z) \wedge E(z, x_2) \wedge \neg E(z, z))]$$

concluimos que:

$$\mathfrak{A} \models \exists z (z \neq a \wedge z \neq b \wedge E(a, z) \wedge E(z, a) \wedge E(b, z) \wedge E(z, b) \wedge \neg E(z, z))$$

La ley 0-1 para $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$: Primer corolario

Ejemplo (continuación)

Como a y b son elementos arbitrarios, tenemos que:

$$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \forall x_2 (x_1 \neq x_2 \rightarrow \theta_2(x_1, x_2))$$

Concluimos que:

$$AE_3 \models \forall x_1 \forall x_2 (x_1 \neq x_2 \rightarrow \bigvee_{i \geq 1} \theta_i(x_1, x_2))$$

Por lo tanto: $\mu_{\mathcal{L}}(\text{CONEXO}) = 1$

► ¿Por qué?

La ley 0-1 para $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$: Segundo corolario

Sabemos que cada fórmula en LPO con operador de menor punto fijo puede ser expresada en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$

- ▶ Y también tenemos este resultado para LPO con operador parcial de punto fijo

La ley 0-1 para $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$: Segundo corolario

Sabemos que cada fórmula en LPO con operador de menor punto fijo puede ser expresada en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$

- ▶ Y también tenemos este resultado para LPO con operador parcial de punto fijo

Corolario

Si $\mathcal{L}$ es un vocabulario que sólo contiene relaciones, entonces:

- ▶ *LPO con operador de menor punto fijo tiene la ley 0-1 para $\mathcal{L}$*
- ▶ *LPO con operador parcial de punto fijo tiene la ley 0-1 para $\mathcal{L}$*

Consecuencia fundamental: Lógicas que no pueden contar

Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y $\text{PARIDAD} = \{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \text{dominio de } \mathfrak{A} \text{ tiene un número par de elementos}\}$

Corolario

PARIDAD no es expresable en LPO, LPO con operador de menor punto fijo, LPO con operador parcial de punto fijo o $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$

Ninguna de las lógicas mencionadas en el corolario *puede contar*

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Sabemos que el siguiente problema es indecidible:

$$\text{FIN-VAL} = \{\varphi \mid \varphi \text{ es satisfecha por todos los modelos finitos}\}$$

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Sabemos que el siguiente problema es indecidible:

$$\text{FIN-VAL} = \{\varphi \mid \varphi \text{ es satisfecha por todos los modelos finitos}\}$$

Fije un vocabulario $\mathcal{L}$ que sólo contiene relaciones. ¿Es el siguiente problema decidable?

$$\text{CASI-VAL} = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración y } \mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1\}$$

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Sabemos que el siguiente problema es indecidible:

$$\text{FIN-VAL} = \{\varphi \mid \varphi \text{ es satisfecha por todos los modelos finitos}\}$$

Fije un vocabulario $\mathcal{L}$ que sólo contiene relaciones. ¿Es el siguiente problema decidable?

$$\text{CASI-VAL} = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración y } \mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1\}$$

En este caso estamos preguntando si una fórmula es “casi válida”

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Teorema

CASI-VAL es decidable

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Teorema

CASI-VAL es decidable

Demostración: Usamos herramientas de lógica clásica

- Consideramos modelos infinitos

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Teorema

CASI-VAL es decidable

Demostración: Usamos herramientas de lógica clásica

- Consideramos modelos infinitos

Suponemos que $\mathcal{L} = \{R(\cdot, \cdot)\}$

- La demostración puede ser extendida fácilmente a cualquier vocabulario que sólo contiene relaciones

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Teorema

CASI-VAL es decidable

Demostración: Usamos herramientas de lógica clásica

- Consideramos modelos infinitos

Suponemos que $\mathcal{L} = \{R(\cdot, \cdot)\}$

- La demostración puede ser extendida fácilmente a cualquier vocabulario que sólo contiene relaciones

Consideramos nuevamente el conjunto de los axiomas de extensión AE para el vocabulario $\mathcal{L}$

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Teorema

CASI-VAL es decidable

Demostración: Usamos herramientas de lógica clásica

- Consideramos modelos infinitos

Suponemos que $\mathcal{L} = \{R(\cdot, \cdot)\}$

- La demostración puede ser extendida fácilmente a cualquier vocabulario que sólo contiene relaciones

Consideramos nuevamente el conjunto de los axiomas de extensión AE para el vocabulario $\mathcal{L}$

- ¿Cómo se define este conjunto para un vocabulario arbitrario (sólo con relaciones)?

Decibilidad de la ley 0-1 para LPO: Demostración

Sabemos que si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son modelos de AE , entonces para toda oración φ en LPO se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi$

Entonces: Para toda oración φ en LPO, $AE \models \varphi$ ó $AE \models \neg\varphi$

- $\text{Th}(AE)$ es una teoría completa

Este resultado combinado con el siguiente lema nos va a dar la decibilidad de CASI-VAL

Lema

$\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$ si y sólo si $AE \models \varphi$

Decibilidad de la ley 0-1 para LPO: Demostración

Demostración del lema:

($\Leftarrow$) Si $AE \models \varphi$, entonces por compacidad sabemos que existe $AE' \subseteq AE$ tal que AE' es finito y $AE' \models \varphi$

Por lo tanto: $AE_k \models \varphi$, para algún $k \geq 1$

Tenemos que $1 = \mu_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_k) \leq \mu_{\mathcal{L}}(\varphi) \leq 1$

($\Rightarrow$) Si $AE \not\models \varphi$, entonces $AE \models \neg\varphi$

► Por el punto anterior: $\mu_{\mathcal{L}}(\neg\varphi) = 1$ y, por lo tanto, $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 0$



Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Tenemos los ingredientes necesarios para demostrar el teorema

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Tenemos los ingredientes necesarios para demostrar el teorema

Del lema anterior: $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$ si y sólo si $\varphi \in \text{Th}(AE)$

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Tenemos los ingredientes necesarios para demostrar el teorema

Del lema anterior: $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$ si y sólo si $\varphi \in \text{Th}(AE)$

Pero $\text{Th}(AE)$ es una teoría completa con una axiomatización infinita (enumerable) y decidable

► Tenemos que $\text{Th}(AE)$ es una teoría decidable

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Tenemos los ingredientes necesarios para demostrar el teorema

Del lema anterior: $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$ si y sólo si $\varphi \in \text{Th}(AE)$

Pero $\text{Th}(AE)$ es una teoría completa con una axiomatización infinita (enumerable) y decidable

► Tenemos que $\text{Th}(AE)$ es una teoría decidable

Concluimos que CASI-VAL es decidable

