

Leyes 0-1

IIC3263

Leyes 0-1: Notación

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

- Recuerde que una propiedad $\mathcal{P}$ sobre $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ -propiedad) es un subconjunto de $\text{STRUCT}[\mathcal{L}]$

Notación

- $s_{\mathcal{L}}^n$: Número de $\mathcal{L}$ -estructuras con dominio $\{1, \dots, n\}$
- $s_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{P})$: Número de $\mathcal{L}$ -estructuras con dominio $\{1, \dots, n\}$ que satisfacen la propiedad $\mathcal{P}$

Leyes 0-1: Notación

Ejemplo

Sea $\mathcal{L} = \{R(\cdot, \cdot)\}$

- ▶ $s_{\mathcal{L}}^n = 2^{n^2}$
- ▶ Si $\mathcal{P}$ es el conjunto de estructuras que satisfacen la dependencia funcional:

$$\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(x, z) \rightarrow y = z),$$

entonces $s_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{P}) = (n + 1)^n$

Leyes 0-1: Probabilidad asintótica

Definición

- ▶ $\mu_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{P}) = \frac{s_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{P})}{s_{\mathcal{L}}^n}$: Representa la probabilidad de que una $\mathcal{L}$ -estructura satisfaga la propiedad $\mathcal{P}$
- ▶ $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{P})$

Ejemplo

Si $\mathcal{P}$ es el conjunto de estructuras que satisfacen la dependencia funcional $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(x, z) \rightarrow y = z)$, entonces:

$$\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = 0$$

Leyes 0-1: Ejercicios

Notación

Dada una oración φ en una lógica:

$$s_{\mathcal{L}}^n(\varphi) = |\{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \text{el dominio de } \mathfrak{A} \text{ es } \{1, \dots, n\} \text{ y } \mathfrak{A} \models \varphi\}|$$

Ejercicios

1. Sea $\varphi = \forall x \exists y R(x, y)$. Demuestre que $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$
2. Demuestre que $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P})$ puede no estar definido
3. Demuestre que $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P})$ puede tomar un valor distinto de 0 y 1

Ejercicio 1: Relación entre $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P})$ y $\mu_{\mathcal{L}}(\overline{\mathcal{P}})$

Dado un vocabulario $\mathcal{L}$ y una $\mathcal{L}$ -propiedad $\mathcal{P}$:

$$\overline{\mathcal{P}} = \{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \notin \mathcal{P}\}$$

Suponga que $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = c$, donde $c \in [0, 1]$

► Se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{P}) = c$

Entonces se tiene que $\mu_{\mathcal{L}}(\overline{\mathcal{P}}) = 1 - c$

► Ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{L}}^n(\overline{\mathcal{P}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \mu_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{P})\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{P})$

Ejercicio 1: Relación entre $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P})$ y $\mu_{\mathcal{L}}(\overline{\mathcal{P}})$

Sea $\mathcal{L} = \{R(\cdot, \cdot)\}$ y $\varphi = \forall x \exists y R(x, y)$

► $\neg\varphi \equiv \exists x \forall y \neg R(x, y)$

Vamos a demostrar que $\mu_{\mathcal{L}}(\neg\varphi) = 0$

► Concluimos que $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$

Sea $n \geq 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$ y:

$$N_i = \{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \text{el dominio de } \mathfrak{A} \text{ es } \{1, \dots, n\} \\ \text{y no existe } j \in \{1, \dots, n\} \text{ tal que } (i, j) \in R^{\mathfrak{A}}\}$$

Ejercicio 1: Relación entre $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P})$ y $\mu_{\mathcal{L}}(\overline{\mathcal{P}})$

Tenemos que $s_{\mathcal{L}}^n(\neg\varphi) \leq \sum_{i=1}^k |N_i|$

Dado que $|N_i| = 2^{(n-1) \cdot n}$, concluimos que $s_{\mathcal{L}}^n(\neg\varphi) \leq n \cdot 2^{(n-1) \cdot n}$

Por lo tanto:

$$\mu_{\mathcal{L}}^n(\neg\varphi) \leq \frac{n \cdot 2^{(n-1) \cdot n}}{2^{n^2}} = \frac{n}{2^n}$$

Concluimos que:

$$0 \leq \mu_{\mathcal{L}}(\neg\varphi) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

□

Ejercicio 3: Un poco de inducción

Sea $\mathcal{L} = \{U(\cdot)\}$ y $\mathcal{P}$ la siguiente propiedad:

$$\{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid U^{\mathfrak{A}} \text{ tiene una cantidad par de elementos}\}$$

Vamos a demostrar que $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}$

Para $n \geq 1$, sea:

$$P_n = \{A \subseteq \{1, \dots, n\} \mid |A| \text{ es par}\}$$

Lema

Para cada $n \geq 1$, se tiene que $|P_n| = 2^{n-1}$

Ejercicio 3: Un poco de inducción

Vamos a demostrar el lema por inducción:

- ▶ Caso base ($n = 1$): $P_1 = \{\emptyset\}$, por lo que $|P_1| = 1 = 2^{1-1}$
- ▶ Case inductivo: Suponga que la propiedad se cumple para n

Tenemos que:

$$P_{n+1} = \{A \subseteq \{1, \dots, n+1\} \mid |A| \text{ es par y } n+1 \notin A\} \cup \\ \{A \subseteq \{1, \dots, n+1\} \mid |A| \text{ es par y } n+1 \in A\}$$

Ejercicio 3: Un poco de inducción

Como estos conjuntos son disjuntos:

$$|P_{n+1}| = |\{A \subseteq \{1, \dots, n+1\} \mid |A| \text{ es par y } n+1 \notin A\}| + |\{A \subseteq \{1, \dots, n+1\} \mid |A| \text{ es par y } n+1 \in A\}|$$

Pero:

$$\begin{aligned} |\{A \subseteq \{1, \dots, n+1\} \mid |A| \text{ es par y } n+1 \notin A\}| &= |P_n| \\ |\{A \subseteq \{1, \dots, n+1\} \mid |A| \text{ es par y } n+1 \in A\}| &= 2^n - |P_n| \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción $|P_n| = 2^{n-1}$

Concluimos que $|P_{n+1}| = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$

Ejercicio 3: Un poco de inducción

Sea $n \geq 1$. Dado que $s_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{P}) = |P_n|$, concluimos del lema que:

$$\mu_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{P}) = \frac{s_{\mathcal{L}}^n(\mathcal{P})}{s_{\mathcal{L}}^n} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto: $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}$



Leyes 0-1: Definición

Definición

Una lógica $\mathcal{LO}$ tiene la ley 0-1 para un vocabulario $\mathcal{L}$ si para cada $\mathcal{L}$ -propiedad $\mathcal{P}$ definible en $\mathcal{LO}$, se tiene que $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = 0$ o $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = 1$

Teorema (Glebskii-Kogan-Liogon'kii-Talanov & Fagin)

Si $\mathcal{L}$ es un vocabulario que sólo contiene relaciones, entonces LPO tiene la ley 0-1 para $\mathcal{L}$

Leyes 0-1 para LPO: Demostración

Vamos a demostrar que la LPO tiene la ley 0-1

- ▶ Para cada vocabulario que sólo contiene relaciones

Pero antes:

- ▶ Vamos a mostrar como pueden ser utilizadas las leyes 0-1 para demostrar resultados de inexpresibilidad
- ▶ Vamos a mostrar porque no podemos considerar lenguajes con constantes

Leyes 0-1: Usos

¿Para qué nos sirve esta ley?

- ▶ Nos indica que una lógica no puede contar
- ▶ Podemos utilizarla para demostrar que una propiedad no es expresable en alguna lógica

Ejemplo

Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y $\text{PARIDAD} = \{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \text{dominio de } \mathfrak{A} \text{ tiene un número par de elementos}\}$.

Vamos a demostrar que PARIDAD no es expresable en LPO

Leyes 0-1: Paridad

Ejemplo (continuación)

Supongamos que PARIDAD si es expresable en LPO

- Existe φ en LPO tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si el dominio de $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos

Dado que LPO tiene la ley 0-1 para $\mathcal{L}$: $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 0$ ó $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$

Pero:

$$s_{\mathcal{L}}^n(\varphi) = \begin{cases} 0 & n \text{ es impar} \\ 1 & n \text{ es par} \end{cases}$$

Como $s_{\mathcal{L}}^n = 1$, concluimos que $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi)$ no está definido

- Esto contradice que $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 0$ ó $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$

Leyes 0-1: Vocabularios con constantes

Vamos a mostrar que LPO no necesariamente tiene la ley 0-1 para un vocabulario con constantes.

Sea $\mathcal{L} = \{P(\cdot), c\}$ y $\varphi = P(c)$. Vamos a demostrar que $\mu_{\mathcal{L}}^k(\varphi) = \frac{1}{2}$ para todo $k \geq 1$.

► Por lo tanto: $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = \frac{1}{2}$

Para cada $k \geq 1$, sea:

$$S_k = \{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \text{dominio de } \mathfrak{A} \text{ es } \{1, \dots, k\} \text{ y } \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

$$N_k = \{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \text{dominio de } \mathfrak{A} \text{ es } \{1, \dots, k\} \text{ y } \mathfrak{A} \models \neg\varphi\}$$

Leyes 0-1: Vocabularios con constantes

Sea $f : S_k \rightarrow N_k$ definida como:

$$f(\langle A, P^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}} \rangle) = \langle A, A \setminus P^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}} \rangle$$

La función f es una biyección

► ¿Por qué?

Se tiene que $|S_k| = |N_k|$

► De esto se concluye que $\mu_{\mathcal{L}}^k(\varphi) = \frac{1}{2}$ ya que $s_{\mathcal{L}}^k = |S_k| + |N_k|$ y $s_{\mathcal{L}}^k(\varphi) = |S_k|$

□