

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ y la LPO con operador de menor punto fijo

Hay propiedades que no pueden ser expresadas en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$

- ▶ De hecho, sabemos que algunas de estas propiedades son computables en tiempo polinomial

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ y la LPO con operador de menor punto fijo

Hay propiedades que no pueden ser expresadas en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$

- ▶ De hecho, sabemos que algunas de estas propiedades son computables en tiempo polinomial

Vamos a demostrar que la LPO con operador de menor punto fijo está contenida en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ y la LPO con operador de menor punto fijo

Hay propiedades que no pueden ser expresadas en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$

- ▶ De hecho, sabemos que algunas de estas propiedades son computables en tiempo polinomial

Vamos a demostrar que la LPO con operador de menor punto fijo está contenida en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$

- ▶ Concluimos que la LPO con operador de menor punto fijo no captura PTIME

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ y la LPO con operador de menor punto fijo

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

- ▶ $R_1, \dots, R_n$ son símbolos de predicados que no son mencionados en $\mathcal{L}$
- ▶ La aridad de R_i es k_i ($1 \leq i \leq n$)

Sea $\varphi_i(\bar{x}_i, R_1, \dots, R_n)$ ($1 \leq i \leq n$) una fórmula en LPO sobre $(\mathcal{L} \cup \{R_1, \dots, R_n\})$ que es positiva en $R_1, \dots, R_n$

- ▶ El número de variables en $\bar{x}_i$ es igual al número de argumentos en R_i
- ▶ V_i es el conjunto de variables mencionadas en $\varphi_i(\bar{x}_i, R_1, \dots, R_n)$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ y la LPO con operador de menor punto fijo

Sea $\ell \in \{1, \dots, n\}$. La siguiente es una fórmula en LPO con operador de menor punto fijo:

$$\alpha(\bar{y}) = [\mathbf{lfp}_{\bar{x}_\ell, R_\ell}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))](\bar{y})$$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ y la LPO con operador de menor punto fijo

Sea $\ell \in \{1, \dots, n\}$. La siguiente es una fórmula en LPO con operador de menor punto fijo:

$$\alpha(\bar{y}) = [\mathbf{lfp}_{\bar{x}_\ell, R_\ell}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))](\bar{y})$$

Sean:

$$k = \text{máx}\{k_1, \dots, k_n\}$$

$$v = |V_1| + \dots + |V_n|$$

Vamos a mostrar como expresar $\alpha(\bar{y})$ en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^{2 \cdot k + v + k_\ell}$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ y la LPO con operador de menor punto fijo

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, definimos:

$$\psi_i^0(\bar{x}_i) = \neg(u = u),$$

donde u es una variable en $\bar{x}_i$

¿Qué representa ψ_i^0 ?

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ y la LPO con operador de menor punto fijo

Sea $i \in \{1, \dots, n\}$ y $m \geq 0$

Definimos $\psi_i^{m+1}(\bar{x}_i)$ como $\varphi_i(\bar{x}_i, R_1, \dots, R_n)$ pero aplicando la siguiente regla de reemplazo.

- Suponga que $R_j(\bar{v})$ es mencionado en $\varphi_i(\bar{x}_i, R_1, \dots, R_n)$, con $j \in \{1, \dots, n\}$, $\bar{v} = (v_1, \dots, v_{k_j})$ y $\{v_1, \dots, v_{k_j}\} \subseteq V_i$.

$R_j(\bar{v})$ es reemplazado en $\psi_i^{m+1}(\bar{x}_i)$ por:

$$\exists \bar{z} \left[\bar{z} = \bar{v} \wedge \exists \bar{x}_j \left(\bar{x}_j = \bar{z} \wedge \psi_j^m(\bar{x}_j) \right) \right]$$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ y la LPO con operador de menor punto fijo

Entonces $\alpha(\bar{y})$ es equivalente a:

$$\exists \bar{x}_\ell \left[\bar{y} = \bar{x}_\ell \wedge \left(\bigvee_{m \geq 0} \psi_\ell^m(\bar{x}_\ell) \right) \right]$$

¿Por qué la equivalencia es cierta?

LPO con operador de menor punto fijo: Inclusión

De lo anterior obtenemos como conclusión:

Proposición

Cada fórmula φ en LPO con operador de menor punto fijo puede ser expresada en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$

LPO con operador de menor punto fijo no captura PTIME

Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y $\text{PARIDAD} = \{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \text{dominio de } \mathfrak{A} \text{ tiene un número par de elementos}\}$

Obtenemos como corolarios de los resultados anteriores:

LPO con operador de menor punto fijo no captura PTIME

Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y $\text{PARIDAD} = \{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \text{dominio de } \mathfrak{A} \text{ tiene un número par de elementos}\}$

Obtenemos como corolarios de los resultados anteriores:

Corolario

PARIDAD no es expresable en LPO con operador de menor punto fijo

LPO con operador de menor punto fijo no captura PTIME

Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y $\text{PARIDAD} = \{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \text{dominio de } \mathfrak{A} \text{ tiene un número par de elementos}\}$

Obtenemos como corolarios de los resultados anteriores:

Corolario

PARIDAD no es expresable en LPO con operador de menor punto fijo

Corolario

LPO con operador de menor punto fijo no captura PTIME

Complejidad Descriptiva: Orden

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ que contiene predicado binario $<$

Notación

- ▶ $\text{ORDSTRUCT}[\mathcal{L}] = \{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid <^{\mathfrak{A}} \text{ es un orden lineal}\}$
- ▶ *Lenguaje*: Subconjunto de $\{\text{enc}(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \text{ORDSTRUCT}[\mathcal{L}]\}$, donde $\text{enc}(\mathfrak{A})$ no incluye al predicado $<$
- ▶ *Clase de complejidad*: Conjunto de lenguajes

Complejidad Descriptiva: Orden

Definición

Una lógica $\mathcal{LO}$ captura una clase de complejidad $\mathcal{C}$ *sobre la clase de estructuras ordenadas* si:

- ▶ Para toda oración φ en $\mathcal{LO}$, se tiene que $L_\varphi^< = \{\text{enc}(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \text{ORDSTRUCT}[\mathcal{L}] \text{ y } \mathfrak{A} \models \varphi\}$ está en $\mathcal{C}$
- ▶ Para cada $L \in \mathcal{C}$, existe una oración φ en $\mathcal{LO}$ tal que $L = L_\varphi^<$
Vale decir, para cada $\mathfrak{A} \in \text{ORDSTRUCT}[\mathcal{L}]$: $\text{enc}(\mathfrak{A}) \in L$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$

Complejidad Descriptiva: Una lógica para PTIME

Teorema (Immerman-Vardi)

LPO con operador de menor punto fijo captura PTIME sobre la clase de estructuras ordenadas

Complejidad Descriptiva: Una lógica para PTIME

Teorema (Immerman-Vardi)

LPO con operador de menor punto fijo captura PTIME sobre la clase de estructuras ordenadas

Demostración: Consideramos el caso $\mathcal{L} = \{G(\cdot, \cdot), <\}$

- ▶ Para otros vocabularios la demostración es similar

Sabemos que para toda oración φ en LPO con operador de menor punto fijo, se tiene que $L_\varphi^<$ está en PTIME

- ▶ Sólo tenemos que demostrar la otra dirección

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

Dado L en PTIME, vamos a encontrar φ en LPO con operador de menor punto fijo tal que $L = L_{\varphi}^{<}$

- ▶ Para cada $\mathfrak{A} \in \text{ORDSTRUCT}[\mathcal{L}]$: $\text{enc}(\mathfrak{A}) \in L$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$

Suponemos que L es aceptado por una MT determinista M que para en todas las entradas y funciona en tiempo n^k

- ▶ Como en la demostración del teorema de Fagin: M funciona en tiempo n^{2k} para una estructura con n elementos

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

Además, suponemos que $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, donde:

- ▶ $\Sigma = \{0, 1\}$
- ▶ $Q = \{q_0, \dots, q_m\}$
- ▶ $F = \{q_m\}$
- ▶ $\delta : (Q \setminus \{q_m\}) \times (\Sigma \cup \{B, \vdash\}) \rightarrow Q \times (\Sigma \cup \{B, \vdash\}) \times \{\leftarrow, \square, \rightarrow\}$
es una función total

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

Fórmulas auxiliares:

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

Fórmulas auxiliares:

► φ_O : Orden lexicográfico construido a partir de $<$

$$\varphi_O(x_1, \dots, x_{2k}, y_1, \dots, y_{2k}) = \bigvee_{i=1}^{2k} \left(\left(\bigwedge_{j=1}^{i-1} x_j = y_j \right) \wedge x_i < y_i \right)$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

Fórmulas auxiliares:

- ▶ φ_O : Orden lexicográfico construido a partir de $<$

$$\varphi_O(x_1, \dots, x_{2k}, y_1, \dots, y_{2k}) = \bigvee_{i=1}^{2k} \left(\left(\bigwedge_{j=1}^{i-1} x_j = y_j \right) \wedge x_i < y_i \right)$$

- ▶ φ_P : Primer elemento del orden O

$$\varphi_P(\bar{x}) = \neg \exists \bar{y} \varphi_O(\bar{y}, \bar{x})$$

Cada tupla de variables tiene largo $2k$ ($|\bar{x}| = |\bar{y}| = 2k$)

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

Fórmulas auxiliares:

- φ_O : Orden lexicográfico construido a partir de $<$

$$\varphi_O(x_1, \dots, x_{2k}, y_1, \dots, y_{2k}) = \bigvee_{i=1}^{2k} \left(\left(\bigwedge_{j=1}^{i-1} x_j = y_j \right) \wedge x_i < y_i \right)$$

- φ_P : Primer elemento del orden O

$$\varphi_P(\bar{x}) = \neg \exists \bar{y} \varphi_O(\bar{y}, \bar{x})$$

Cada tupla de variables tiene largo $2k$ ($|\bar{x}| = |\bar{y}| = 2k$)

- φ_S : Relación de sucesor asociada a O

$$\varphi_S(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi_O(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \neg \exists \bar{z} (\varphi_O(\bar{x}, \bar{z}) \wedge \varphi_O(\bar{z}, \bar{y}))$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

Oración φ es definida como:

$$\begin{aligned} \exists \bar{u} \left[\text{Ifp}_{\bar{u}_m, E_{q_m}} \left(\right. \right. & \theta_{T_0}(\bar{x}_1, \bar{y}_1, T_0, T_1, T_B, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \dots, E_{q_m}), \\ & \theta_{T_1}(\bar{x}_2, \bar{y}_2, T_0, T_1, T_B, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \dots, E_{q_m}), \\ & \theta_{T_B}(\bar{x}_3, \bar{y}_3, T_0, T_1, T_B, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \dots, E_{q_m}), \\ & \theta_{T_{\vdash}}(\bar{x}_4, \bar{y}_4, T_0, T_1, T_B, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \dots, E_{q_m}), \\ & \theta_H(\bar{x}_5, \bar{y}_5, T_0, T_1, T_B, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \dots, E_{q_m}), \\ & \theta_{NH}(\bar{x}_6, \bar{y}_6, T_0, T_1, T_B, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \dots, E_{q_m}), \\ & \theta_{E_{q_0}}(\bar{u}_0, T_0, T_1, T_B, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \dots, E_{q_m}), \\ & \dots, \\ & \left. \left. \theta_{E_{q_m}}(\bar{u}_m, T_0, T_1, T_B, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \dots, E_{q_m}) \right) \right] (\bar{u}) \end{aligned}$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

$\theta_{T_0}(\bar{x}_1, \bar{y}_1, T_0, T_1, T_B, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \dots, E_{q_m})$:

$$\begin{aligned}
 & \varphi_P(\bar{x}_1) \wedge \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \left(\neg \exists w (w < z_1) \wedge \neg G(z_2, z_3) \wedge \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \varphi_S(\underbrace{z_1, \dots, z_1}_{2k-2 \text{ veces}}, z_2, z_3, \bar{y}_1) \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad \vee \\
 & \exists \bar{z} (\varphi_S(\bar{z}, \bar{x}_1) \wedge T_0(\bar{z}, \bar{y}_1) \wedge NH(\bar{z}, \bar{y}_1)) \\
 & \qquad \qquad \qquad \vee \\
 & \bigvee_{(q,a) : \delta(q,a)=(q',0,X)} \exists \bar{z} \left(\varphi_S(\bar{z}, \bar{x}_1) \wedge T_a(\bar{z}, \bar{y}_1) \wedge H(\bar{z}, \bar{y}_1) \wedge E_q(\bar{z}) \right)
 \end{aligned}$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

$\theta_{T_1}(\bar{x}_2, \bar{y}_2, T_0, T_1, T_B, T_\vdash, H, NH, E_{q_0}, \dots, E_{q_m})$:

$$\begin{aligned}
 & \varphi_P(\bar{x}_2) \wedge \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \left(\neg \exists w (w < z_1) \wedge G(z_2, z_3) \wedge \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \varphi_S(\underbrace{z_1, \dots, z_1}_{2k-2 \text{ veces}}, z_2, z_3, \bar{y}_2) \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad \vee \\
 & \exists \bar{z} (\varphi_S(\bar{z}, \bar{x}_2) \wedge T_1(\bar{z}, \bar{y}_2) \wedge NH(\bar{z}, \bar{y}_2)) \\
 & \qquad \qquad \qquad \vee \\
 & \bigvee_{(q,a) : \delta(q,a)=(q',1,X)} \exists \bar{z} \left(\varphi_S(\bar{z}, \bar{x}_2) \wedge T_a(\bar{z}, \bar{y}_2) \wedge H(\bar{z}, \bar{y}_2) \wedge E_q(\bar{z}) \right)
 \end{aligned}$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

$\theta_{T_B}(\bar{x}_3, \bar{y}_3, T_0, T_1, T_B, T_\vdash, H, NH, E_{q_0}, \dots, E_{q_m})$:

$$\varphi_P(\bar{x}_3) \wedge \exists z_1 \exists z_2 \left(\neg \exists v (v < z_1) \wedge z_1 < z_2 \wedge \right. \\ \left. \neg \exists z_3 (z_1 < z_3 \wedge z_3 < z_2) \wedge \varphi_O(\underbrace{z_1, \dots, z_1}_{2k-3 \text{ veces}}, z_2, z_1, z_1, \bar{y}_3) \right)$$

$\vee$

$$\exists \bar{z} (\varphi_S(\bar{z}, \bar{x}_3) \wedge T_B(\bar{z}, \bar{y}_3) \wedge NH(\bar{z}, \bar{y}_3))$$

$\vee$

$$\bigvee_{(q,a) : \delta(q,a)=(q',B,X)} \exists \bar{z} \left(\varphi_S(\bar{z}, \bar{x}_3) \wedge T_a(\bar{z}, \bar{y}_3) \wedge H(\bar{z}, \bar{y}_3) \wedge E_q(\bar{z}) \right)$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

$\theta_{T_{\vdash}}(\bar{x}_4, \bar{y}_4, T_0, T_1, T_B, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \dots, E_{q_m})$:

$$\begin{aligned} & (\varphi_P(\bar{x}_4) \wedge \varphi_P(\bar{y}_4)) \\ & \quad \vee \\ & \quad \exists \bar{z} (\varphi_S(\bar{z}, \bar{x}_4) \wedge T_{\vdash}(\bar{z}, \bar{y}_4) \wedge NH(\bar{z}, \bar{y}_4)) \\ & \quad \vee \\ & \quad \bigvee_{(q,a) : \delta(q,a)=(q',\vdash,X)} \exists \bar{z} \left(\varphi_S(\bar{z}, \bar{x}_4) \wedge T_a(\bar{z}, \bar{y}_4) \wedge H(\bar{z}, \bar{y}_4) \wedge E_q(\bar{z}) \right) \end{aligned}$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

$\theta_H(\bar{x}_5, \bar{y}_5, T_0, T_1, T_B, T_\vdash, H, NH, E_{q_0}, \dots, E_{q_m})$:

$$\begin{aligned}
 & \varphi_P(\bar{x}_5) \wedge \varphi_S(\bar{x}_5, \bar{y}_5) \\
 & \quad \vee \\
 & \bigvee_{(q,a) : \delta(q,a)=(q',b,\leftarrow)} \exists \bar{v} \exists \bar{w} \left(\varphi_S(\bar{v}, \bar{x}_5) \wedge \varphi_S(\bar{y}_5, \bar{w}) \wedge \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. T_a(\bar{v}, \bar{w}) \wedge H(\bar{v}, \bar{w}) \wedge E_q(\bar{v}) \right) \\
 & \quad \vee
 \end{aligned}$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

$$\bigvee_{(q,a) : \delta(q,a)=(q',b,\rightarrow)} \bigvee \exists \bar{v} \exists \bar{w} \left(\varphi_S(\bar{v}, \bar{x}_5) \wedge \varphi_S(\bar{w}, \bar{y}_5) \wedge \right. \\ \left. T_a(\bar{v}, \bar{w}) \wedge H(\bar{v}, \bar{w}) \wedge E_q(\bar{v}) \right) \\ \bigvee \exists \bar{v} \left(\varphi_S(\bar{v}, \bar{x}_5) \wedge T_a(\bar{v}, \bar{y}_5) \wedge H(\bar{v}, \bar{y}_5) \wedge E_q(\bar{v}) \right)$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

$\theta_{NH}(\bar{x}_6, \bar{y}_6, T_0, T_1, T_B, T_\vdash, H, NH, E_{q_0}, \dots, E_{q_m})$:

$$\begin{aligned} & \varphi_P(\bar{x}_6) \wedge \exists \bar{z} (\varphi_S(\bar{x}_6, \bar{z}) \wedge (\varphi_O(\bar{y}_6, \bar{z}) \vee \varphi_O(\bar{z}, \bar{y}_6))) \\ & \vee \\ & \bigvee_{(q,a) : \delta(q,a)=(q',b,\leftarrow)} \exists \bar{v} \exists \bar{w} \exists \bar{z} \left(\varphi_S(\bar{v}, \bar{x}_6) \wedge T_a(\bar{v}, \bar{w}) \wedge H(\bar{v}, \bar{w}) \wedge \right. \\ & \quad \left. E_q(\bar{v}) \wedge \varphi_S(\bar{z}, \bar{w}) \wedge (\varphi_O(\bar{y}_6, \bar{z}) \vee \varphi_O(\bar{z}, \bar{y}_6)) \right) \\ & \vee \end{aligned}$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

$$\begin{aligned}
 & \bigvee_{(q,a) : \delta(q,a)=(q',b,\rightarrow)} \bigvee \exists \bar{v} \exists \bar{w} \exists \bar{z} \left(\varphi_S(\bar{v}, \bar{x}_6) \wedge T_a(\bar{v}, \bar{w}) \wedge H(\bar{v}, \bar{w}) \wedge \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. E_q(\bar{v}) \wedge \varphi_S(\bar{w}, \bar{z}) \wedge (\varphi_O(\bar{y}_6, \bar{z}) \vee \varphi_O(\bar{z}, \bar{y}_6)) \right) \\
 & \bigvee_{(q,a) : \delta(q,a)=(q',b,\square)} \bigvee \exists \bar{v} \exists \bar{w} \left(\varphi_S(\bar{v}, \bar{x}_6) \wedge T_a(\bar{v}, \bar{w}) \wedge H(\bar{v}, \bar{w}) \wedge \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. E_q(\bar{v}) \wedge (\varphi_O(\bar{y}_6, \bar{w}) \vee \varphi_O(\bar{w}, \bar{y}_6)) \right)
 \end{aligned}$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

$\theta_{E_{q_0}}(\bar{u}_0, T_0, T_1, T_B, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \dots, E_{q_m})$:

$$\bigvee_{(q,a) : \delta(q,a)=(q_0,b,X)} \bigvee_{\varphi_P(\bar{u}_0)} \exists \bar{v} \exists \bar{w} \left(\varphi_S(\bar{v}, \bar{u}_0) \wedge T_a(\bar{v}, \bar{w}) \wedge H(\bar{v}, \bar{w}) \wedge E_q(\bar{v}) \right)$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $\theta_{E_{q_i}}(\bar{u}_i, T_0, T_1, T_B, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \dots, E_{q_m})$ es definido como:

$$\bigvee_{(q', a) : \delta(q', a) = (q_i, b, X)} \exists \bar{v} \exists \bar{w} \left(\varphi_S(\bar{v}, \bar{u}_i) \wedge T_a(\bar{v}, \bar{w}) \wedge H(\bar{v}, \bar{w}) \wedge E_{q'}(\bar{v}) \right)$$

□

Teorema de Immerman-Vardi: Un corolario fundamental

Corolario

$PTIME \neq NP$ si y sólo si LPO con operador de menor punto fijo es menos expresiva que $\exists LSO$ sobre la clase de las estructuras ordenadas

Teorema de Immerman-Vardi: Un corolario fundamental

Corolario

$PTIME \neq NP$ si y sólo si LPO con operador de menor punto fijo es menos expresiva que $\exists LSO$ sobre la clase de las estructuras ordenadas

- ▶ *Existe una oración φ en $\exists LSO$ que no puede ser expresada en LPO con operador de menor punto fijo sobre la clase de las estructuras ordenadas*

¿Y qué pasa si no tenemos un orden?

El Teorema de Immerman-Vardi nos da una lógica que captura PTIME sobre la clase de las estructuras ordenadas.

- ▶ Es una lógica *natural*

¿Y qué pasa si no tenemos un orden?

El Teorema de Immerman-Vardi nos da una lógica que captura PTIME sobre la clase de las estructuras ordenadas.

- ▶ Es una lógica *natural*

Una consecuencia del Teorema de Fagin: Si $\text{PTIME} = \text{NP}$, entonces existe una lógica *natural* que captura PTIME sobre la clase de todas las estructuras

¿Y qué pasa si no tenemos un orden?

El Teorema de Immerman-Vardi nos da una lógica que captura PTIME sobre la clase de las estructuras ordenadas.

- ▶ Es una lógica *natural*

Una consecuencia del Teorema de Fagin: Si $PTIME = NP$, entonces existe una lógica *natural* que captura PTIME **sobre la clase de todas las estructuras**

- ▶ Esta lógica es $\exists LSO$

¿Y qué pasa si no tenemos un orden?

El Teorema de Immerman-Vardi nos da una lógica que captura PTIME sobre la clase de las estructuras ordenadas.

- ▶ Es una lógica *natural*

Una consecuencia del Teorema de Fagin: Si $PTIME = NP$, entonces existe una lógica *natural* que captura PTIME **sobre la clase de todas las estructuras**

- ▶ Esta lógica es $\exists LSO$

Conjetura de Gurevich

No existe una lógica *natural* que capture a PTIME sobre la clase de todas las estructuras

Y finalmente PSPACE ...

Una última pregunta por responder:

- ▶ ¿Existe una lógica que captura PSPACE?

Y finalmente PSPACE ...

Una última pregunta por responder:

- ▶ ¿Existe una lógica que captura PSPACE?

Candidato natural: LPO con operador parcial de punto fijo

Y finalmente PSPACE ...

Una última pregunta por responder:

- ▶ ¿Existe una lógica que captura PSPACE?

Candidato natural: LPO con operador parcial de punto fijo

- ▶ ¿Captura esta lógica a PSPACE sobre la clase de todas las estructuras?

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ y la LPO con operador parcial de punto fijo

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

- ▶ $R_1, \dots, R_n$ son símbolos de predicados que no son mencionados en $\mathcal{L}$
- ▶ La aridad de R_i es k_i ($1 \leq i \leq n$)

Sea $\varphi_i(\bar{x}_i, R_1, \dots, R_n)$ ($1 \leq i \leq n$) una fórmula en LPO sobre $(\mathcal{L} \cup \{R_1, \dots, R_n\})$

- ▶ El número de variables en $\bar{x}_i$ es igual al número de argumentos en R_i
- ▶ V_i es el conjunto de variables mencionadas en $\varphi_i(\bar{x}_i, R_1, \dots, R_n)$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ y la LPO con operador parcial de punto fijo

Sea $\ell \in \{1, \dots, n\}$. La siguiente es una fórmula en LPO con operador parcial de punto fijo:

$$\alpha(\bar{y}) = [\mathbf{pfp}_{\bar{x}_\ell, R_\ell}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))](\bar{y})$$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ y la LPO con operador parcial de punto fijo

Sea $\ell \in \{1, \dots, n\}$. La siguiente es una fórmula en LPO con operador parcial de punto fijo:

$$\alpha(\bar{y}) = [\mathbf{pfp}_{\bar{x}_\ell, R_\ell}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))](\bar{y})$$

Sean:

$$k = \text{máx}\{k_1, \dots, k_n\}$$

$$v = |V_1| + \dots + |V_n|$$

Vamos a mostrar como expresar $\alpha(\bar{y})$ en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^{2 \cdot k + v + k_\ell}$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ y la LPO con operador parcial de punto fijo

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y $m \geq 0$:

- ▶ $\psi_i^m(\bar{x}_i)$ es definida como en la demostración de que la LPO con operador de menor punto fijo está incluida en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$

Además, para cada $m \geq 0$:

$$\Phi^m = \bigwedge_{i=1}^n \forall \bar{x}_i \left(\psi_i^m(\bar{x}_i) \leftrightarrow \psi_i^{m+1}(\bar{x}_i) \right)$$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ y la LPO con operador parcial de punto fijo

Entonces $\alpha(\bar{y})$ es equivalente a:

$$\exists \bar{x}_\ell \left[\bar{y} = \bar{x}_\ell \wedge \bigvee_{m \geq 0} \left(\Phi^m \wedge \psi_\ell^m(\bar{x}_\ell) \right) \right]$$

¿Por qué la equivalencia es cierta?

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ y la LPO con operador parcial de punto fijo

De lo anterior obtenemos como conclusión:

Proposición

Cada fórmula φ en LPO con operador parcial de punto fijo puede ser expresada en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$

LPO con operador parcial de punto fijo no captura PSPACE

Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y $\text{PARIDAD} = \{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \text{dominio de } \mathfrak{A} \text{ tiene un número par de elementos}\}$

Obtenemos como corolarios de los resultados anteriores:

LPO con operador parcial de punto fijo no captura PSPACE

Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y $\text{PARIDAD} = \{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \text{dominio de } \mathfrak{A} \text{ tiene un número par de elementos}\}$

Obtenemos como corolarios de los resultados anteriores:

Corolario

PARIDAD no es expresable en LPO con operador parcial de punto fijo

LPO con operador parcial de punto fijo no captura PSPACE

Corolario

LPO con operador parcial de punto fijo no captura PSPACE

- ▶ *De hecho, LPO con operador parcial de punto fijo ni siquiera incluye a PTIME*

LPO con operador parcial de punto fijo no captura PSPACE

Corolario

LPO con operador parcial de punto fijo no captura PSPACE

- ▶ *De hecho, LPO con operador parcial de punto fijo ni siquiera incluye a PTIME*

¿Qué faltó para capturar PSPACE?

LPO con operador parcial de punto fijo no captura PSPACE

Corolario

LPO con operador parcial de punto fijo no captura PSPACE

- ▶ *De hecho, LPO con operador parcial de punto fijo ni siquiera incluye a PTIME*

¿Qué faltó para capturar PSPACE?

- ▶ Nuevamente vamos a demostrar que el ingrediente faltante era un orden lineal

Complejidad Descriptiva: Una lógica para PSPACE

Teorema

LPO con operador parcial de punto fijo captura PSPACE sobre la clase de estructuras ordenadas

Complejidad Descriptiva: Una lógica para PSPACE

Teorema

LPO con operador parcial de punto fijo captura PSPACE sobre la clase de estructuras ordenadas

Obtenemos como corolario:

Corolario

$NP \neq PSPACE$ si y sólo si $\exists LSO$ es menos expresiva que LPO con operador parcial de punto fijo sobre la clase de las estructuras ordenadas