

Y ahora PTIME ...

Pregunta fundamental en bases de datos:

- ▶ Encontrar una lógica que pueda expresar todas las propiedades computables en tiempo polinomial

Y ahora PTIME ...

Pregunta fundamental en bases de datos:

- ▶ Encontrar una lógica que pueda expresar todas las propiedades computables en tiempo polinomial

Tenemos un candidato: LPO con operador de menor punto fijo

Y ahora PTIME ...

Pregunta fundamental en bases de datos:

- ▶ Encontrar una lógica que pueda expresar todas las propiedades computables en tiempo polinomial

Tenemos un candidato: LPO con operador de menor punto fijo

Problema: Vamos a ver que esta lógica no es suficiente

- ▶ Necesitamos herramientas para estudiar la expresividad de las lógicas con operadores de punto fijo

Una lógica infinitaria

Dado: vocabulario $\mathcal{L}$

Definición

La lógica $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ es definida como la extensión de LPO con dos conectivos infinitarios:

- Si para cada $i \in I$ se tiene que φ_i es una fórmula, donde I no es necesariamente finito, entonces también son fórmulas:

$$\bigvee_{i \in I} \varphi_i \quad \text{y} \quad \bigwedge_{i \in I} \varphi_i$$

Una lógica infinitaria: Semántica

Definición

La semántica de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ es definida de manera usual:

- ▶ $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \bigvee_{i \in I} \varphi_i$ si existe $i \in I$ tal que $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi_i$
- ▶ $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \bigwedge_{i \in I} \varphi_i$ si para todo $i \in I$, se tiene que $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi_i$

¿Qué propiedades podemos expresar en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$?

Ejercicio

Dado $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$, construya una fórmula $\varphi(x, y)$ en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ tal que para toda $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ y elementos c, d en $\mathfrak{A}$:

$\mathfrak{A} \models \varphi(c, d)$ si y sólo si existe un camino desde c a d en el grafo representado por $\mathfrak{A}$

¿Qué propiedades podemos expresar en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$?

Ejercicio

Dado $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$, construya una fórmula $\varphi(x, y)$ en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ tal que para toda $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ y elementos c, d en $\mathfrak{A}$:

$\mathfrak{A} \models \varphi(c, d)$ si y sólo si existe un camino desde c a d en el grafo representado por $\mathfrak{A}$

Sea $\alpha_1(x, y) = E(x, y)$, y para $n \geq 2$:

$$\alpha_n(x, y) = \exists z_1 \exists z_2 \cdots \exists z_n (E(x, z_1) \wedge E(z_1, z_2) \wedge \cdots \wedge E(z_n, y))$$

Entonces: $\varphi(x, y) = \bigvee_{n \geq 1} \alpha_n(x, y)$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}$: Expresividad

Problema: $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ es demasiado expresiva

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario y $\mathcal{C} \subseteq \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ una clase de $\mathcal{L}$ -estructuras cerrada bajo isomorfismo.

- ▶ Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ y $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}$: Expresividad

Problema: $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ es demasiado expresiva

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario y $\mathcal{C} \subseteq \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ una clase de $\mathcal{L}$ -estructuras cerrada bajo isomorfismo.

- Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ y $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$

Proposición

Existe una $\mathcal{L}$ -oración φ en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ tal que $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$.

$\mathcal{L}_{\infty\omega}$: Expresividad

Problema: $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ es demasiado expresiva

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario y $\mathcal{C} \subseteq \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ una clase de $\mathcal{L}$ -estructuras cerrada bajo isomorfismo.

- Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ y $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$

Proposición

Existe una $\mathcal{L}$ -oración φ en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ tal que $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Ejercicio

Demuestre la proposición

Lógicas con un número fijo de variables

Vamos a restringir la lógica $\mathcal{L}_{\infty\omega}$.

- ▶ Para cada $k \geq 1$, sea $\mathcal{L}_{\infty\omega}^k$ el conjunto de fórmulas en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ construidas sólo usando variables $x_1, \dots, x_k$

¿Qué podemos expresar en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^k$?

- ▶ Depende del valor de k

Lógicas con un número fijo de variables: Expresividad

Ejemplo

Clausura transitiva es expresable en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^3$

Sea $\beta_1(x_1, x_2) = E(x_1, x_2)$, y para $n \geq 1$:

$$\beta_{n+1}(x_1, x_2) = \exists x_3 (E(x_1, x_3) \wedge \exists x_1 (x_1 = x_3 \wedge \beta_n(x_1, x_2)))$$

Clausura transitiva:
$$\bigvee_{n \geq 1} \beta_n(x, y)$$

Una lógica con un número restringido de variables

Definición

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ es definida como $\bigcup_{k \geq 1} \mathcal{L}_{\infty\omega}^k$

Una lógica con un número restringido de variables

Definición

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ es definida como $\bigcup_{k \geq 1} \mathcal{L}_{\infty\omega}^k$

Si φ es una fórmula en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$, entonces existe $k \geq 1$ tal que φ está en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^k$

- φ sólo menciona a las variables $x_1, \dots, x_k$

Una lógica con un número restringido de variables

Definición

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ es definida como $\bigcup_{k \geq 1} \mathcal{L}_{\infty\omega}^k$

Si φ es una fórmula en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$, entonces existe $k \geq 1$ tal que φ está en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^k$

- φ sólo menciona a las variables $x_1, \dots, x_k$

¿Cuan expresiva es la lógica $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$?

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras ordenadas

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario que contiene el símbolo $<$

- ▶ Suponemos que los otros predicados de $\mathcal{L}$ son $R_1, \dots, R_\ell$
- ▶ La aridad de R_i es $k_i \geq 1$ ($1 \leq i \leq \ell$)

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras ordenadas

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario que contiene el símbolo $<$

- ▶ Suponemos que los otros predicados de $\mathcal{L}$ son $R_1, \dots, R_\ell$
- ▶ La aridad de R_i es $k_i \geq 1$ ($1 \leq i \leq \ell$)

$\mathcal{O}$ es la clase de $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ tal que $<^{\mathfrak{A}}$ es un orden lineal sobre el dominio de $\mathfrak{A}$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras ordenadas

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario que contiene el símbolo $<$

- ▶ Suponemos que los otros predicados de $\mathcal{L}$ son $R_1, \dots, R_\ell$
- ▶ La aridad de R_i es $k_i \geq 1$ ($1 \leq i \leq \ell$)

$\mathcal{O}$ es la clase de $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ tal que $<^{\mathfrak{A}}$ es un orden lineal sobre el dominio de $\mathfrak{A}$

$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{O}$ es una propiedad sobre las estructuras en $\mathcal{O}$

- ▶ Suponemos que $\mathcal{P}$ es cerrada bajo isomorfismo

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras ordenadas

Sobre la clase $\mathcal{O}$ la lógica $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ es muy expresiva

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras ordenadas

Sobre la clase $\mathcal{O}$ la lógica $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ es muy expresiva

Proposición

Existe una $\mathcal{L}$ -oración Φ en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ tal que para cada $\mathfrak{A} \in \mathcal{O}$:

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{P} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \Phi$$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras ordenadas

Sobre la clase $\mathcal{O}$ la lógica $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ es muy expresiva

Proposición

Existe una $\mathcal{L}$ -oración Φ en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ tal que para cada $\mathfrak{A} \in \mathcal{O}$:

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{P} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \Phi$$

Demostración: Sea $\alpha_1(x_1) = (x_1 = x_1)$, y para $n \geq 1$:

$$\alpha_{n+1}(x_1) = \exists x_2 (x_2 < x_1 \wedge \exists x_1 (x_1 = x_2 \wedge \alpha_n(x_1)))$$

$\mathfrak{A} \models \alpha_n(c)$ si y sólo si existen al menos $(n - 1)$ elementos antes que c de acuerdo al orden $<^{\mathfrak{A}}$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $n \geq 1$:

$$\beta_n(x_1) = \alpha_n(x_1) \wedge \neg \alpha_{n+1}(x_1)$$

$\mathfrak{A} \models \beta_n(c)$ si y sólo si c es el n -ésimo elemento de acuerdo al orden $<^{\mathfrak{A}}$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $n \geq 1$:

$$\beta_n(x_1) = \alpha_n(x_1) \wedge \neg \alpha_{n+1}(x_1)$$

$\mathfrak{A} \models \beta_n(c)$ si y sólo si c es el n -ésimo elemento de acuerdo al orden $<^{\mathfrak{A}}$

- Cada fórmula $\beta_n(x_1)$ está en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^2$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $n \geq 1$:

$$\beta_n(x_1) = \alpha_n(x_1) \wedge \neg \alpha_{n+1}(x_1)$$

$\mathfrak{A} \models \beta_n(c)$ si y sólo si c es el n -ésimo elemento de acuerdo al orden $<^{\mathfrak{A}}$

- Cada fórmula $\beta_n(x_1)$ está en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^2$

Vamos a utilizar las fórmulas $\{\beta_n(x_1)\}_{n \geq 1}$ para definir Φ

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras ordenadas

Sea $\mathfrak{A} \in \mathcal{O}$ con dominio A

- Suponga que $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$, con $n \geq 1$ y $a_1 <^{\mathfrak{A}} a_2 <^{\mathfrak{A}} \dots <^{\mathfrak{A}} a_{n-1} <^{\mathfrak{A}} a_n$

Sea $\Psi_{\mathfrak{A}}$:

$$\exists x_1 \beta_n(x_1) \wedge \neg \exists x_1 \beta_{n+1}(x_1) \wedge$$

$$\bigwedge_{j=1}^{\ell} \left[\forall x_1 \dots \forall x_{k_j} \left(R_j(x_1, \dots, x_{k_j}) \leftrightarrow \right.$$

$$\bigvee_{(a_{i_1}, \dots, a_{i_{k_j}}) \in R_j^{\mathfrak{A}}} \left(\beta_{i_1}(x_1) \wedge \exists x_1 (x_1 = x_2 \wedge \beta_{i_2}(x_1)) \wedge \dots \right.$$

$$\left. \left. \left. \wedge \exists x_1 (x_1 = x_{k_j} \wedge \beta_{i_{k_j}}(x_1)) \right) \right) \right]$$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $\mathfrak{B} \in \mathcal{O}$: Si $\mathfrak{B} \models \Psi_{\mathfrak{A}}$, entonces $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$



$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $\mathfrak{B} \in \mathcal{O}$: Si $\mathfrak{B} \models \Psi_{\mathfrak{A}}$, entonces $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$

- ¿Cómo se representa una estructura $\mathfrak{A}$ con dominio vacío para que se tenga esta propiedad?



$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $\mathfrak{B} \in \mathcal{O}$: Si $\mathfrak{B} \models \Psi_{\mathfrak{A}}$, entonces $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$

- ¿Cómo se representa una estructura $\mathfrak{A}$ con dominio vacío para que se tenga esta propiedad? Se representa con la oración $\Psi_{\mathfrak{A}} = \neg \exists x (x = x)$



$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $\mathfrak{B} \in \mathcal{O}$: Si $\mathfrak{B} \models \Psi_{\mathfrak{A}}$, entonces $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$

- ▶ ¿Cómo se representa una estructura $\mathfrak{A}$ con dominio vacío para que se tenga esta propiedad? Se representa con la oración $\Psi_{\mathfrak{A}} = \neg \exists x (x = x)$
- ▶ Sólo permitimos relaciones con aridad mayor a 0. ¿Cómo podemos manejar las relaciones con aridad igual a 0?



$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $\mathfrak{B} \in \mathcal{O}$: Si $\mathfrak{B} \models \Psi_{\mathfrak{A}}$, entonces $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$

- ▶ ¿Cómo se representa una estructura $\mathfrak{A}$ con dominio vacío para que se tenga esta propiedad? Se representa con la oración $\Psi_{\mathfrak{A}} = \neg \exists x (x = x)$
- ▶ Sólo permitimos relaciones con aridad mayor a 0. ¿Cómo podemos manejar las relaciones con aridad igual a 0?

Sea $p = \max\{k_1, \dots, k_\ell, 2\}$

- ▶ $\Psi_{\mathfrak{A}}$ está en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^p$



$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $\mathfrak{B} \in \mathcal{O}$: Si $\mathfrak{B} \models \psi_{\mathfrak{A}}$, entonces $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$

- ▶ ¿Cómo se representa una estructura $\mathfrak{A}$ con dominio vacío para que se tenga esta propiedad? Se representa con la oración $\psi_{\mathfrak{A}} = \neg \exists x (x = x)$
- ▶ Sólo permitimos relaciones con aridad mayor a 0. ¿Cómo podemos manejar las relaciones con aridad igual a 0?

Sea $p = \max\{k_1, \dots, k_\ell, 2\}$

- ▶ $\psi_{\mathfrak{A}}$ está en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^p$

Entonces: $\phi = \bigvee_{\mathfrak{A} \in \mathcal{P}} \psi_{\mathfrak{A}}$

- ▶ ¿Cómo se demuestra que $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \phi$?

□

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras arbitrarias

¿Cuan expresiva es $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras arbitrarias?

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras arbitrarias

¿Cuan expresiva es $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras arbitrarias?

- Vamos a demostrar que no todas las propiedades (cerradas bajo isomorfismo) son expresables en esta lógica

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras arbitrarias

¿Cuan expresiva es $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras arbitrarias?

- ▶ Vamos a demostrar que no todas las propiedades (cerradas bajo isomorfismo) son expresables en esta lógica

¿Cómo podemos demostrar estos resultados?

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras arbitrarias

¿Cuan expresiva es $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras arbitrarias?

- ▶ Vamos a demostrar que no todas las propiedades (cerradas bajo isomorfismo) son expresables en esta lógica

¿Cómo podemos demostrar estos resultados?

- ▶ Vamos a presentar juegos que caracterizan $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras arbitrarias

¿Cuan expresiva es $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras arbitrarias?

- ▶ Vamos a demostrar que no todas las propiedades (cerradas bajo isomorfismo) son expresables en esta lógica

¿Cómo podemos demostrar estos resultados?

- ▶ Vamos a presentar juegos que caracterizan $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$

¿Por qué nos interesan estos resultados?

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras arbitrarias

¿Cuan expresiva es $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ sobre estructuras arbitrarias?

- ▶ Vamos a demostrar que no todas las propiedades (cerradas bajo isomorfismo) son expresables en esta lógica

¿Cómo podemos demostrar estos resultados?

- ▶ Vamos a presentar juegos que caracterizan $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$

¿Por qué nos interesan estos resultados?

- ▶ Nos sirven para demostrar que hay propiedades que no son expresable en LPO con operador de menor punto fijo y LPO con operador parcial de punto fijo

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

Tablero	:	$\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$
Jugadores	:	Duplicator (D) y Spoiler (S)
Número de guijarros	:	$k \geq 1$ (parámetro del juego)
Número de rondas	:	infinito

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros

Los jugadores tienen pares de guijarros: $\{(g_{\mathfrak{A}}^1, g_{\mathfrak{B}}^1), \dots, (g_{\mathfrak{A}}^k, g_{\mathfrak{B}}^k)\}$

En cada ronda:

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros

Los jugadores tienen pares de guijarros: $\{(g_{\mathfrak{A}}^1, g_{\mathfrak{B}}^1), \dots, (g_{\mathfrak{A}}^k, g_{\mathfrak{B}}^k)\}$

En cada ronda:

1. **S** elige una estructura, digamos $\mathfrak{A}$ (el juego es definido de la misma forma para $\mathfrak{B}$)

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros

Los jugadores tienen pares de guijarros: $\{(g_{\mathfrak{A}}^1, g_{\mathfrak{B}}^1), \dots, (g_{\mathfrak{A}}^k, g_{\mathfrak{B}}^k)\}$

En cada ronda:

1. **S** elige una estructura, digamos $\mathfrak{A}$ (el juego es definido de la misma forma para $\mathfrak{B}$)
2. **S** elige un número $i \in \{1, \dots, k\}$ y coloca $g_{\mathfrak{A}}^i$ sobre algún elemento de $\mathfrak{A}$

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros

Los jugadores tienen pares de guijarros: $\{(g_{\mathfrak{A}}^1, g_{\mathfrak{B}}^1), \dots, (g_{\mathfrak{A}}^k, g_{\mathfrak{B}}^k)\}$

En cada ronda:

1. **S** elige una estructura, digamos $\mathfrak{A}$ (el juego es definido de la misma forma para $\mathfrak{B}$)
2. **S** elige un número $i \in \{1, \dots, k\}$ y coloca $g_{\mathfrak{A}}^i$ sobre algún elemento de $\mathfrak{A}$
3. **D** responde colocando $g_{\mathfrak{B}}^i$ sobre algún elemento de $\mathfrak{B}$

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros

En cada ronda los guijarros en juego definen una función:

- ▶ $g_{\mathfrak{A}}^i$ tiene como imagen a $g_{\mathfrak{B}}^i$

S gana si en alguna ronda los guijarros en juego no forman un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

- ▶ En caso contrario gana **D**

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros: Estrategia ganadora

Notación

D tiene una estrategia ganadora en el juego de Ehrenfeucht-Fraïssé con k guijarros entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, si para cada posible forma de jugar de **S**, existe una forma de jugar de **D** que le permite ganar.

► $\mathfrak{A} \equiv_k^{\infty\omega} \mathfrak{B}$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$ y los juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

Teorema

Dos $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en todas las oraciones de $\mathcal{L}_{\infty\omega}^k$ si y sólo si $\mathfrak{A} \equiv_k^{\infty\omega} \mathfrak{B}$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$: Un poco de intuición ...

Ejercicios

1. Sea $\mathfrak{A}$ un grafo formado por un ciclo y $\mathfrak{B}$ un grafo formado por la unión disjunta de dos ciclos.
 - 1.1 Demuestre que si los ciclos son lo suficientemente largos, entonces $\mathfrak{A} \equiv_2^{\infty\omega} \mathfrak{B}$
 - 1.2 Demuestre que sin importar cuan largos son los ciclos, se tiene que $\mathfrak{A} \not\equiv_3^{\infty\omega} \mathfrak{B}$
 - 1.3 Encuentre una oración en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^3$ que distinga entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$: Un poco de intuición ...

Ejercicios

2. Demuestre que para todo $k \geq 1$ se tiene que $\mathcal{L}_{\infty\omega}^k$ es menos expresivo que $\mathcal{L}_{\infty\omega}^{k+1}$

3. Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y $\text{PARIDAD} = \{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \text{dominio de } \mathfrak{A} \text{ tiene un número par de elementos}\}$

Demuestre que PARIDAD no es expresable en $\mathcal{L}_{\infty\omega}^\omega$