Y ahora PTIME ...

Pregunta fundamental en bases de datos:

- Encontrar una lógica que pueda expresar todas las propiedades computables en tiempo polinomial

Tenemos un candidato: LPO con operador de menor punto fijo

Problema: Vamos a ver que esta lógica no es suficiente

- Necesitamos herramientas para estudiar la expresividad de las lógicas con operadores de punto fijo

Una lógica infinitaria

Dado: vocabulario $\mathcal{L}$

Definición

La lógica $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ es definida como la extensión de LPO con dos conectivos infinitarios:

- *Si para cada $i \in I$ se tiene que φ_i es una fórmula, donde I no es necesariamente finito, entonces también son fórmulas:*

$$\bigvee_{i \in I} \varphi_i \quad \text{y} \quad \bigwedge_{i \in I} \varphi_i$$

Una lógica infinitaria: Semántica

Definición

La semántica de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ es definida de manera usual:

- $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \bigvee_{i \in I} \varphi_i$ *si existe* $i \in I$ *tal que* $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi_i$
- $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \bigwedge_{i \in I} \varphi_i$ *si para todo* $i \in I$, *se tiene que* $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi_i$

¿Qué propiedades podemos expresar en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$?

Ejercicio

Dado $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$, construya una fórmula $\varphi(x, y)$ en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y elementos c, d en $\mathfrak{A}$:

$\mathfrak{A} \models \varphi(c, d)$ si y sólo si existe un camino desde c a d en el grafo representado por $\mathfrak{A}$

Sea $\alpha_1(x, y) = E(x, y)$, y para $n \geq 2$:

$$\alpha_n(x, y) = \exists z_1 \exists z_2 \cdots \exists z_n \, (E(x, z_1) \wedge E(z_1, z_2) \wedge \cdots \wedge E(z_n, y))$$

Entonces: $$\varphi(x, y) \; = \; \bigvee_{n \geq 1} \alpha_n(x, y)$$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}$: Expresividad

Problema: $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ es demasiado expresiva

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario y $\mathcal{C} \subseteq \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ una clase de $\mathcal{L}$-estructuras cerrada bajo isomorfismo.

- Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ y $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$

Proposición

Existe una $\mathcal{L}$-oración φ en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ tal que $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Ejercicio

Demuestre la proposición

Lógicas con un número fijo de variables

Vamos a restringir la lógica $\mathcal{L}_{\infty\omega}$.

- Para cada $k \geq 1$, sea $\mathcal{L}^k_{\infty\omega}$ el conjunto de fórmulas en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ construidas sólo usando variables $x_1, \ldots, x_k$

¿Qué podemos expresar en $\mathcal{L}^k_{\infty\omega}$?

- Depende del valor de k

Lógicas con un número fijo de variables: Expresividad

Ejemplo

Clausura transitiva es expresable en $\mathcal{L}^3_{\infty\omega}$

Sea $\beta_1(x_1, x_2) = E(x_1, x_2)$, y para $n \geq 1$:

$$\beta_{n+1}(x_1, x_2) \quad = \quad \exists x_3 \, (E(x_1, x_3) \wedge \exists x_1 \, (x_1 = x_3 \wedge \beta_n(x_1, x_2)))$$

Clausura transitiva: $\displaystyle \bigvee_{n \geq 1} \beta_n(x, y)$

Una lógica con un número restringido de variables

Definición

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ *es definida como* $\bigcup_{k \geq 1} \mathcal{L}^{k}_{\infty\omega}$

Si φ es una fórmula en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$, entonces existe $k \geq 1$ tal que φ está en $\mathcal{L}^{k}_{\infty\omega}$

- φ sólo menciona a las variables $x_1, \ldots, x_k$

¿Cuan expresiva es la lógica $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$?

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario que contiene el símbolo $<$

- Suponemos que los otros predicados de $\mathcal{L}$ son $R_1, \ldots, R_\ell$
- La aridad de R_i es $k_i \geq 1$ $(1 \leq i \leq \ell)$

$\mathcal{O}$ es la clase de $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ tal que $<^{\mathfrak{A}}$ es un orden lineal sobre el dominio de $\mathfrak{A}$

$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{O}$ es una propiedad sobre las estructuras en $\mathcal{O}$

- Suponemos que $\mathcal{P}$ es cerrada bajo isomorfismo

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Sobre la clase $\mathcal{O}$ la lógica $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ es muy expresiva

Proposición

Existe una $\mathcal{L}$-oración Φ en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ tal que para cada $\mathfrak{A} \in \mathcal{O}$:

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{P} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \Phi$$

Demostración: Sea $\alpha_1(x_1) = (x_1 = x_1)$, y para $n \geq 1$:

$$\alpha_{n+1}(x_1) \quad = \quad \exists x_2\,(x_2 < x_1 \wedge \exists x_1\,(x_1 = x_2 \wedge \alpha_n(x_1)))$$

$\mathfrak{A} \models \alpha_n(c)$ si y sólo si existen al menos $(n-1)$ elementos antes que c de acuerdo al orden $<^{\mathfrak{A}}$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $n \geq 1$:

$$\beta_n(x_1) \quad = \quad \alpha_n(x_1) \wedge \neg\alpha_{n+1}(x_1)$$

$\mathfrak{A} \models \beta_n(c)$ si y sólo si c es el n-ésimo elemento de acuerdo al orden $<^{\mathfrak{A}}$

- Cada fórmula $\beta_n(x_1)$ está en $\mathcal{L}^{2}_{\infty\omega}$

Vamos a utilizar las fórmulas $\{\beta_n(x_1)\}_{n\geq 1}$ para definir Φ

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Sea $\mathfrak{A} \in \mathcal{O}$ con dominio A

- Suponga que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$, con $n \geq 1$ y $a_1 <^{\mathfrak{A}} a_2 <^{\mathfrak{A}} \cdots <^{\mathfrak{A}} a_{n-1} <^{\mathfrak{A}} a_n$

Sea $\Psi_{\mathfrak{A}}$:

$$\exists x_1\, \beta_n(x_1) \wedge \neg\exists x_1\, \beta_{n+1}(x_1) \wedge$$

$$\bigwedge_{j=1}^{\ell} \Bigg[\forall x_1 \cdots \forall x_{k_j} \Bigg(R_j(x_1, \ldots, x_{k_j}) \leftrightarrow$$

$$\bigvee_{(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k_j}}) \in R_j^{\mathfrak{A}}} \Bigg(\beta_{i_1}(x_1) \wedge \exists x_1\, (x_1 = x_2 \wedge \beta_{i_2}(x_1)) \wedge \cdots$$

$$\wedge\, \exists x_1\, (x_1 = x_{k_j} \wedge \beta_{i_{k_j}}(x_1))\Bigg)\Bigg)\Bigg]$$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $\mathfrak{B} \in \mathcal{O}$: Si $\mathfrak{B} \models \Psi_{\mathfrak{A}}$, entonces $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$

- ¿Cómo se representa una estructura $\mathfrak{A}$ con dominio vacío para que se tenga esta propiedad? Se representa con la oración $\Psi_{\mathfrak{A}} = \neg\exists x\,(x = x)$
- Sólo permitimos relaciones con aridad mayor a 0. ¿Cómo podemos manejar las relaciones con aridad igual a 0?

Sea $p = \text{máx}\{k_1, \ldots, k_\ell, 2\}$

- $\Psi_{\mathfrak{A}}$ está en $\mathcal{L}^{p}_{\infty\omega}$

Entonces: $$\Phi = \bigvee_{\mathfrak{A} \in \mathcal{P}} \Psi_{\mathfrak{A}}$$

- ¿Cómo se demuestra que $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \Phi$?

$\square$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras arbitrarias

¿Cuan expresiva es $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras arbitrarias?

- Vamos a demostrar que no todas las propiedades (cerradas bajo isomorfismo) son expresables en esta lógica

¿Cómo podemos demostrar estos resultados?

- Vamos a presentar juegos que caracterizan $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$

¿Por qué nos interesan estos resultados?

- Nos sirven para demostrar que hay propiedades que no son expresable en LPO con operador de menor punto fijo y LPO con operador parcial de punto fijo

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

Tablero	:	$\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$
Jugadores	:	Duplicator (**D**) y Spoiler (**S**)
Número de guijarros	:	$k \geq 1$ (parámetro del juego)
Número de rondas	:	infinito

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros

Los jugadores tienen pares de guijarros: $\{(g^1_{\mathfrak{A}}, g^1_{\mathfrak{B}}), \ldots, (g^k_{\mathfrak{A}}, g^k_{\mathfrak{B}})\}$

En cada ronda:

1. **S** elije una estructura, digamos $\mathfrak{A}$ (el juego es definido de la misma forma para $\mathfrak{B}$)
2. **S** elije un número $i \in \{1, \ldots, k\}$ y coloca $g^i_{\mathfrak{A}}$ sobre algún elemento de $\mathfrak{A}$
3. **D** responde colocando $g^i_{\mathfrak{B}}$ sobre algún elemento de $\mathfrak{B}$

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros

En cada ronda los guijarros en juego definen una función:

- $g^i_{\mathfrak{A}}$ tiene como imagen a $g^i_{\mathfrak{B}}$

S gana si en alguna ronda los guijarros en juego no forman un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

- En caso contrario gana **D**

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros: Estrategia ganadora

Notación

D *tiene una estrategia ganadora en el juego de Ehrenfeucht-Fraïssé con* k *guijarros entre* $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$*, si para cada posible forma de jugar de* **S***, existe una forma de jugar de* **D** *que le permite ganar.*

- $\mathfrak{A} \equiv_k^{\infty\omega} \mathfrak{B}$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ y los juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

Teorema

Dos $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en todas las oraciones de $\mathcal{L}^{k}_{\infty\omega}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \equiv_{k}^{\infty\omega} \mathfrak{B}$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$: Un poco de intuición . . .

Ejercicios

1. Sea $\mathfrak{A}$ un grafo formado por un ciclo y $\mathfrak{B}$ un grafo formado por la unión disjunta de dos ciclos.
   1.1 Demuestre que si los ciclos son lo suficientemente largos, entonces $\mathfrak{A} \equiv^{\infty\omega}_{2} \mathfrak{B}$
   1.2 Demuestre que sin importar cuan largos son los ciclos, se tiene que $\mathfrak{A} \not\equiv^{\infty\omega}_{3} \mathfrak{B}$
   1.3 Encuentre una oración en $\mathcal{L}^{3}_{\infty\omega}$ que distingue entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$: Un poco de intuición . . .

Ejercicios

2. Demuestre que para todo $k \geq 1$ se tiene que $\mathcal{L}^{k}_{\infty\omega}$ es menos expresivo que $\mathcal{L}^{k+1}_{\infty\omega}$

3. Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y PARIDAD $= \{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \mid$ dominio de $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos$\}$

   Demuestre que PARIDAD no es expresable en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$